

FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA: LA ELABORACIÓN DE TAREAS DE APRENDIZAJE PROFESIONAL PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA: A ELABORAÇÃO DE TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL PARA O ESTUDO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

INITIAL AND CONTINUING TEACHER EDUCATION: THE DEVELOPMENT OF PROFESSIONAL LEARNING TASKS FOR THE STUDY OF THE CONCEPT OF FUNCTION



Caroline Miranda Pereira LIMA¹
e-mail: caroll_mpl@hotmail.com



Vinícius PAZUCH²
e-mail: vinicius.pazuch@ufabc.edu.br

Cómo hacer referencia a este artículo:

LIMA, C. M. P. L.; PAZUCH, V. Formación inicial y continua: La elaboración de tareas de aprendizaje profesional para el estudio del concepto de función. **Revista Ibero-Americana de Estudios em Educação**, Araraquara, v. 18, n. 00, e023166, 2023. e-ISSN: 1982-5587. DOI: <https://doi.org/10.21723/riaee.v18i00.17242>



| **Enviado en:** 15/08/2023
| **Revisiones requeridas el:** 07/09/2023
| **Aprobado el:** 11/10/2023
| **Publicado en:** 28/12/2023

Editor: Prof. Dr. José Luís Bizelli
Editor Adjunto Ejecutivo: Prof. Dr. José Anderson Santos Cruz

¹ Universidad Federal del ABC (UFABC), Santo André – SP – Brasil. Máster en Magisterio e Historia de la Ciencia y las Matemáticas.

² Universidad Federal del ABC (UFABC), Santo André – SP – Brasil. Doctor en Ciencias y Didáctica de las Matemáticas por la ULBRA. Profesor del Centro de Matemáticas, Computación y Cognición de la Universidad Federal del ABC.

RESUMEN: Este artículo tiene como objetivo presentar las Tareas de Aprendizaje Profesional elaboradas sobre el concepto de función como recurso para posibilitar oportunidades de aprendizaje profesional vinculadas al conocimiento matemático y didáctico de los docentes que imparten clases de matemática y futuros docentes de esta disciplina. Para la elaboración de las tareas fue elegido el modelo Professional Learning Opportunities for Teachers, que utiliza los componentes de la dimensión conceptual establecidos sobre la base de los conceptos fundamentales y los aspectos de aprendizaje del contenido de funciones, definidos por el material de apoyo al trabajo de los profesores. En este aspecto, el instrumento formativo elaborado indica elementos de estructuras y posibilidades para el desarrollo inicial y continuo del aprendizaje del profesor fundamentada en la práctica, este artículo no presenta resultados empíricos, pues no hubo recolección de datos, únicamente la elaboración de las tareas.

PALABRAS CLAVE: Concepto de función. Tareas de aprendizaje profesional. Tareas matemáticas. Modelo PLOT. Conocimiento del profesor.

RESUMO: O presente artigo visa apresentar as Tarefas de Aprendizagem Profissional elaboradas sobre o conceito de função como um recurso para possibilitar oportunidades de aprendizagem profissional vinculadas aos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores e futuros docentes de matemática. Para a elaboração das tarefas foi escolhido o modelo Professional Learning Opportunities for Teachers, utilizando as componentes da dimensão conceitual estabelecidas com base nos conceitos fundamentais e nos aspectos de aprendizagem do conteúdo de funções, definidos pelo material de apoio ao trabalho dos professores. Nesse aspecto, o instrumento formativo elaborado indica elementos de estruturas e possibilidades para o desenvolvimento inicial e contínuo da aprendizagem do professor fundamentada na prática, sendo que, para este artigo, não se apresenta resultados empíricos, visto que não houve coleta de dados, apenas a elaboração das tarefas.

PALAVRAS-CHAVE: Conceito de função. Tarefas de aprendizagem profissional. Tarefas matemáticas. Modelo PLOT. Conhecimento do professor.

ABSTRACT: This article aims to present the Professional Learning Tasks elaborated on the concept of function as a resource to enable professional learning opportunities linked to mathematical and didactic knowledge for teachers and future teachers of mathematics. For the elaboration of the tasks was chosen the model Professional Learning Opportunities for Teachers, that uses the components of the conceptual dimension established based on the fundamental concepts and learning aspects of the content of functions, defined by the material to support the work of teachers. In this regard, the training instrument developed indicates elements of structures and possibilities for the initial and continuous development of teacher learning grounded in practice, whereas, for this article does not present empirical results, because there was no data collection, only the preparation of tasks.

KEYWORDS: Concept of function. Professional learning tasks. Mathematical tasks. PLOT Model. Teacher's knowledge.

Introducción

La formación inicial de los profesores se da a través de los cursos de pregrado de Licenciatura y Pedagogía y a través de otras actividades extracurriculares que conforman momentos de aprendizaje docente. El aprendizaje docente no puede dissociarse de la formación inicial y continua, ya que la práctica pedagógica representa el elemento que interconecta los procesos de formación docente a través de discusiones teóricas y ejercicios prácticos, lo que expresa la inseparabilidad de los diferentes períodos de formación docente (PIMENTA, 2012; TARDIF, 2014).

En este aspecto, los estudios con un enfoque central en la conexión entre la formación inicial y continua docente han sido muy poco realizados (ROLDÃO, 2007), por lo que no articulan ambos campos de investigación, lo que difiere de la concepción del desarrollo profesional como un *continuum*³ (NÓVOA, 1991). La formación inicial del futuro profesor de matemáticas es desarrollar conocimientos y concepciones sobre conceptos matemáticos y conocimientos pedagógicos para el ejercicio de la docencia. Así, dado que el desarrollo profesional docente se basa en la continuidad, la educación continua implica experiencia docente -para que los docentes que enseñan matemáticas puedan mejorar su repertorio de conocimiento del contenido y del alumno- y ayude a superar los obstáculos evidenciados en el entorno del aula (ZUFFI; PACCA, 2002).

La investigación de Gorzoni y Davis (2017) y Rangel, Giraldo y Maculan Filho (2015) muestra el estímulo y la propuesta de entornos colaborativos en los que los docentes pueden reflexionar sobre su práctica a la luz de un marco teórico, de manera que el proceso de formación no quede aislado. Es un camino para establecer la colaboración a lo largo de la formación docente y el uso de las Tareas de Aprendizaje Profesional (TAP) (BALL; COHEN, 1999; SMITH, 2001; SWAN, 2007), que explican artefactos prácticos, como materiales curriculares, videos, episodios de clase y trabajos de los estudiantes.

De acuerdo con las concepciones de Ball y Cohen (1999) sobre el aprendizaje profesional, el TAP indica que las discusiones colectivas son la base del aprendizaje profesional, ya que a través del diálogo los docentes pueden ampliar sus propias oportunidades de aprender comprendiendo, comparando y (re)formulando sus propias incertidumbres. El uso de la TAP como recurso didáctico pedagógico para la formación inicial y continua de los docentes concentra tres pilares: los artefactos de la práctica, los desarrollos basados en el

³ De acuerdo con Nóvoa (1991), un desarrollo continuo *implica* la formación permanente del docente, de manera que exista un proceso continuo de crecimiento profesional, que involucre la formación inicial y continua.

mencionado TAP y el papel del formador de profesores, mediador de las oportunidades de aprendizaje profesional y de las nuevas prácticas docentes a lo largo del proceso de formación.

Con la exploración de un contenido matemático específico para ser implementado en el TAP, *este artículo se centra en la presentación y discusión del TAP elaborado para el estudio del concepto de función en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas etiqueta*. Desde esta perspectiva, el vínculo entre el estudiante y el conocimiento se establece a través del profesor⁴, por lo que, además de ayudar en la comprensión del conocimiento que está presente en el pensamiento de los estudiantes, anclado en el aprendizaje en la práctica y con la práctica, el uso del TAP puede posibilitar la construcción del conocimiento de manera activa, con el fin de establecer las más diversas relaciones (desequilibrios, nuevas hipótesis e interpretaciones) que involucran el concepto de función.

Fundamentación teórica

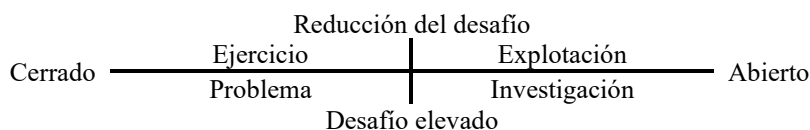
Tareas Matemáticas (TM) y Tareas de Aprendizaje Profesional (TAP)

La elaboración de TAP se apoyará en las investigaciones de Ponte (2014), Ball y Cohen (1999) y Silver *et al.* (2007) en cuanto a su estructuración. En el contexto del aula, la palabra "tarea" puede entenderse como un producto generalmente elaborado por el profesor, pero no necesariamente. Ponte (2014) con el propósito de movilizar el conocimiento y centrar la atención de los estudiantes en una idea matemática (STEIN *et al.*, 2009), que, a su vez, se refiere a una actividad matemática a resolver (CUNHA, 2000; PONTE, 2014). Por lo tanto, la tarea es una acción externa al alumno, y la actividad es una acción realizada por el alumno.

De acuerdo con Boavida *et al.* (2008), el docente puede utilizar diferentes tipos de tareas a la hora de considerar el contexto de aprendizaje, ya sean aquellas que conducen a la memorización y la práctica procedimental o aquellas orientadas hacia pensamientos más elaborados. Al respecto, Ponte (2005) señala cuatro tipos diferentes de tareas: ejercicio, problema, exploración e investigación, como se sugiere en la Figura 1. La estructura horizontal se refiere al grado de claridad del contenido, es decir, a los tipos de razonamiento requeridos divididos entreabierto y cerrado, mientras que la estructura vertical se relaciona con la percepción de la dificultad de la tarea, y los niveles de exigencia cognitiva varían entre bajos y altos.

⁴ La relación entre profesor - conocimiento - alumno remite al triángulo de la didáctica de D'Amore (2007).

Figura 1 – Relación entre los tipos de tareas, en términos de su grado de desafío y apertura



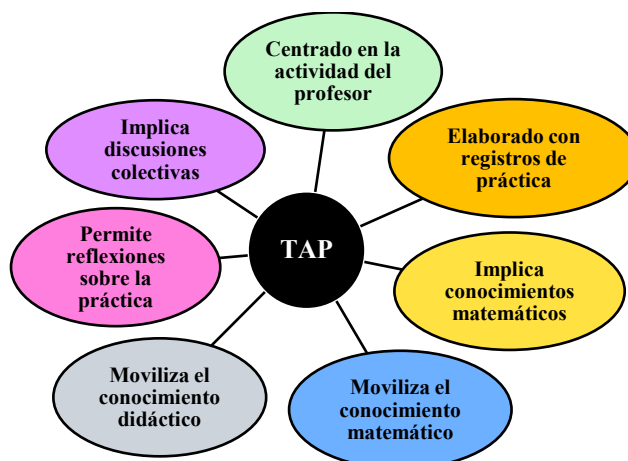
Fuente: adaptado de Ponte (2005)

Esta relación entre diferentes tipos de tareas ayuda a clasificar las Tareas Matemáticas (TM), entendidas como

[...] Las tareas que piden a los estudiantes que realicen un procedimiento memorizado de manera rutinaria representan un cierto tipo de oportunidad para que los estudiantes piensen; Las tareas que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente y que los alientan a hacer conexiones representan un tipo diferente de oportunidad para que los estudiantes piensen (STEIN; SMITH, 2009, p. 22, nuestra traducción).

Por otro lado, con el objetivo de ampliar los dominios de conocimiento del profesor (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), las TAP representan una oportunidad para el aprendizaje profesional de los profesores (BALL; COHEN, 1999; RIBEIRO; PONTE, 2020; SILVER *et al.*, 2007), ya que agregan elementos que aportan su mejora: (Figura 2).

Figura 2 – Estructura y posibilidades del TAP para la formación del profesorado



Fuente: adaptado de Barboza (2019)

En cuanto a los elementos enumerados por Barboza (2019), se destaca que estas tareas se centran en la actividad del docente; involucran conceptos matemáticos; movilizan conocimientos matemáticos y didácticos; abarcan discusiones que pueden posibilitar reflexiones sobre la práctica docente y, finalmente, se elaboran con registros de prácticas⁵. Así,

⁵ Involucran artefactos de práctica, como materiales curriculares, videos, episodios de clase y trabajos de los estudiantes (BALL; COHEN, 1999).

las TAP de este artículo están compuestos por TM, destinados a estudiantes de Educación Básica, de manera que representan registros de la práctica a realizar por los estudiantes.

Otros componentes que pueden proporcionar oportunidades de aprendizaje profesional para los docentes se refieren al papel y las acciones del formador (RIBEIRO; PONTE, 2020), por lo que la "interacción entre los docentes y el formador, en el uso de la TAP, puede ser un factor importante en la promoción de oportunidades de aprendizaje basadas en la práctica" (BARBOZA; PAZUCH; RIBEIRO, 2021, p. 7, nuestra traducción). Las TAP también permite visualizar los efectos de los planes del formador en la construcción del conocimiento matemático y didáctico del profesor.

El estudio de las funciones en la formación del profesorado

Los conceptos matemáticos actuales y más complejos se elaboran a través de evoluciones continuas, una composición generada en diferentes períodos históricos por diferentes mentes humanas (ZUFFI; PACCA, 2002). El concepto de función, por ejemplo, tuvo su primera elaboración formal a partir de los estudios de movimientos y tasas de cambio de cantidades continuamente variables, desarrollados por Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) (SOUSA; MOURA, 2019).

Sin embargo, la evolución del concepto de función no se estancó en los trabajos de Newton y Leibniz, por el contrario, expresa significados más allá de la comprensión de los fenómenos naturales, ya que, en Matemáticas, este concepto se aplica a las generalizaciones, la resolución de problemas y la formalización de otros conceptos matemáticos más abstractos (SOUSA; MOURA, 2019). En lo que se refiere a la enseñanza de las Funciones en el territorio brasileño, las directrices curriculares sobre la orientación de lo que "debería" ser enseñado por los profesores de matemática a sus alumnos en la Educación Básica están organizadas y estructuradas a través de la Base Nacional Común Curricular (BNCC), ya que

[...] Los currículos tienen funciones complementarias para asegurar los aprendizajes esenciales definidos para cada etapa de la educación básica, ya que dichos aprendizajes solo se materializan a través del conjunto de decisiones que caracterizan al currículo en acción (BRASIL, 2017, p. 12, nuestra traducción).

En relación con el currículo de Matemáticas, en el BNCC se presenta el contenido de Funciones en el campo de Álgebra. En este documento se define el conjunto de conocimientos y habilidades esenciales que se espera que los estudiantes desarrollen en el proceso de aprendizaje.

La comprensión de conceptos matemáticos vinculados al campo del Álgebra requiere el desarrollo del pensamiento algebraico, que permite "tratar con otras relaciones y estructuras matemáticas y utilizarlas en la interpretación y resolución de problemas matemáticos u otros dominios" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10, nuestra traducción). Para Ribeiro y Cury (2015), el pensamiento algebraico representa un proceso de generalización llevado a cabo por estudiantes, cuyos argumentos son ideas matemáticas derivadas de observaciones de un conjunto particular de datos.

Así, Ribeiro y Cury (2015) retoman las concepciones del pensamiento funcional y se refieren a él a través del acto de generalizar la variación de dos cantidades relacionadas y explorar la idea fundamental del concepto matemático de función. Así, la configuración de la enseñanza de la Función como dimensión del Álgebra refuerza la articulación entre los campos de conocimiento, determinada por la equivalencia, el orden, la proporcionalidad, la interdependencia, la representación, la variación y la aproximación (BRASIL, 2017).

La construcción del concepto de función y de los respectivos saberes vinculados a ella comienza en la Educación Básica, y se amplía y formaliza en la formación inicial de los docentes. Sin embargo, es necesario continuar la construcción del concepto a través de procesos de educación continua, dado que gran parte del conocimiento profesional emerge en la práctica (LAMPERT, 2010). El profesor tiene un papel significativo para involucrar conceptos matemáticos, aspectos curriculares, pedagógicos y didácticos en su práctica, ya que "el conocimiento profesional se construye en la acción y la interacción y solo es realmente útil si es movilizable en la acción" (PONTE, 1999, p. 16, nuestra traducción).

Con esto, se entiende que el aprendizaje del docente continúa y se basa en la práctica de los docentes que ya están en el ambiente de trabajo en el aula y de los futuros docentes, quienes (re)significan sus conocimientos cuando entran en contacto con experiencias profesionales prácticas. La propuesta de trabajar el concepto de función con el uso del PAT refuerza la perspectiva del aprendizaje en la práctica y con la práctica, de investigar la enseñanza en la enseñanza misma, con el fin de brindar oportunidades de aprendizaje profesional, ya sea en la educación inicial o continua.

Procedimientos metodológicos

Elaboración de un cuadro de referencia

Para la elaboración de un marco de referencia, se decidió utilizar el *Professional Learning Opportunities for Teachers* (PLOT), ⁶desarrollado por Ribeiro y Ponte (2020) para la planificación y ejecución de programas de formación docente. Este modelo fue establecido por los investigadores para unificar tres dominios presentes en la investigación de la formación docente en el campo de la Educación Matemática que involucran el Papel y las Acciones del Formador (PAF), la TAP y las Interacciones Discursivas entre Participantes (IDP).

El modelo PLOT, al asociar en su estructura las oportunidades de aprendizaje docente, pretende concebir una perspectiva interactiva e interconectada a los procesos de formación de profesores (RIBEIRO; PONTE, 2020). La estructura de cada dominio del modelo PLOT está compuesta por cuatro componentes divididos entre la dimensión conceptual, caracterizada por la estructura y bases teóricas, y la dimensión operativa, que manifiesta los lineamientos para la aplicación del modelo, como se puede observar en el Cuadro 1. La acción conjunta de ambas dimensiones tiene como sesgo la organización de un proceso de formación docente, la identificación y comprensión de cómo surgen las oportunidades de aprendizaje profesional para los docentes y si aparecen (RIBEIRO; PONTE, 2020).

Cuadro 1 – Dimensiones, componentes y características del modelo PLOT en tres dominios

	Dimensión conceptual		Dimensión operativa	
	Componente	Característica	Componente	Característica
<i>Papel y Acciones del Formador (PAF)</i>	<i>Acercamiento</i>	Promover la aproximación de la Matemática Académica (MA) a la Matemática Escolar (ME) y viceversa.	<i>Gestión</i>	Promover la gestión de un entorno de enseñanza-aprendizaje exploratorio, con las diferentes fases de este enfoque.
	<i>Articulación</i>	Estimular la articulación entre las dimensiones matemática y didáctica del conocimiento profesional para enseñar.	<i>Orquestación</i>	Preparar y desarrollar la orquestación de discusiones matemáticas y didácticas entre todos los participantes.
<i>Tareas de Aprendizaje Profesional (TAP)</i>	<i>Conocimiento profesional</i>	Explorar los conocimientos matemáticos y didácticos de los docentes relacionados con la TME.	<i>Tarea Matemática</i>	Contemplar la(s) tarea(s) matemática(s) del alumnado TME, de alto nivel cognitivo.

⁶ El modelo PLOT fue concebido con el fin de satisfacer la demanda de desarrollo de estructuras compartidas para el estudio del aprendizaje docente a través de una perspectiva interactiva e interconectada.

	<i>Enseñanza exploratoria</i>	Contar con una estructura que proporcione un entorno exploratorio de enseñanza-aprendizaje.	<i>Registros de práctica</i>	Involucran diferentes tipos de registros de práctica, organizados en forma de <i>Vignettes</i> .
<i>Interacciones discursivas entre participantes (IDP)</i>	<i>Discusiones Matemáticas y Enseñanza</i>	Contemplar, de manera articulada, las discusiones matemáticas y didácticas relacionadas con las TME.	<i>Lenguaje Movilizado</i>	Contemplar el uso de un lenguaje matemático y didáctico adecuado y pertinente al nivel de enseñanza de las TME.
	<i>Argumentación y Justificación</i>	Implicar una argumentación y justificación matemática y didáctica válida.	<i>Comunicación Dialógica</i>	Promover la comunicación dialógica e integradora entre todos los participantes.

Fuente: Ribeiro e Ponte (2020)

En este artículo, consideramos exclusivamente el dominio de la TAP con sus respectivos componentes, con un abordaje de la dimensión conceptual a través del conocimiento profesional y la enseñanza exploratoria y la dimensión operativa a través de tareas matemáticas y registros de prácticas.

Cuadro 2 – Dimensiones, componentes y características en el campo de la TAP con enfoque en la enseñanza del concepto de función para los diferentes niveles de la Educación Básica

	Dimensión Conceptual		Dimensión operativa	
	Componente	Característica	Componente	Característica
<i>Primeros años de la escuela primaria</i>	<i>Conocimiento profesional</i>	Trabajo con secuencias de funciones variables naturales.	<i>Tarea matemática</i>	Identificación y seguimiento de un patrón de secuencia.
	<i>Enseñanza exploratoria</i>	Cada número (orden) corresponde a un término determinado, que puede ser un número, un objeto geométrico o cualquier otro objeto.	<i>Registro de Práctica</i>	Tarea matemática que se proporcionará a los estudiantes de Años Iniciales.
<i>Últimos años de la escuela primaria</i>	<i>Conocimiento profesional</i>	Correspondencias entre dos variables, representadas en tablas, gráficos y diagramas. No se discute la definición formal del concepto de función.	<i>Tarea matemática</i>	Se resolvió un problema centrado en la variación del área de un polígono en función de una distancia dada.
	<i>Enseñanza exploratoria</i>	Énfasis en la resolución de problemas relacionados con situaciones de proporcionalidad directa, que involucran relaciones funcionales.	<i>Registro de Práctica</i>	Tarea matemática a proporcionar a los estudiantes de los Últimos Años, con un guión, para la construcción del polígono del problema en el software Geogebra.

	Conocimiento profesional	Aproximación al concepto de función de forma explícita, además de la transición entre diferentes representaciones de una función.	Tarea matemática	Análisis de dominio e imagen de una función a partir de su grafo y expresión algebraica.
Secundaria	Enseñanza exploratoria	Los estudiantes pueden: - Definir qué es una función (concepto y noción ⁷); - Identificar las relaciones definidas como funciones y no funciones; - Indicar dominio, imagen y nombre de dominio; - Reconocer representaciones tabulares, diagramas, algebraicas, de generalización de patrones, gráficas y formales; - Utilizar el concepto en la resolución de problemas y modelado de situaciones reales.	Registro de Práctica	Tarea de matemáticas que se proporcionará a los estudiantes de secundaria, con dos resoluciones incorrectas más comunes entre los estudiantes.

Fuente: Elaborado por los autores

En el Cuadro 2 se presenta la estructuración del TAP con un enfoque en la enseñanza del concepto de función para cada nivel educativo en la Educación Básica, sintetizando las orientaciones curriculares y didácticas para la enseñanza. La caracterización de cada componente se estableció a través del análisis del capítulo "Funciones" del libro *Álgebra en Educación Básica*⁸, de Ponte, Branco y Matos (2009). De acuerdo con los fundamentos conceptuales y aspectos de aprendizaje presentados en Ponte, Branco y Matos (2009), se determinaron los saberes profesionales a movilizar en la acción y las direcciones de la enseñanza exploratoria, así, se estipularon las características de los componentes de la dimensión operativa de acuerdo con los componentes de la dimensión conceptual.

Elaboración de un cuadro de referencia

Con un total de tres TAP, se identifican como: TAP - EFI, que se compone de dos TM (TM1 y TM2) para los primeros años de la escuela primaria; TAP - EFF, que tiene un TM (TM3) para los últimos años de la escuela primaria; y TAP - MS que presenta TM4, cuyos conocimientos matemáticos están vinculados al currículo de la Enseñanza Media.

Siguiendo los lineamientos del Cuadro 2, se seleccionaron y adaptaron TMs cuyos objetivos están vinculados a las características de los componentes de la dimensión conceptual

⁷ Relación entre variables y correspondencia unívoca entre dos conjuntos.

⁸ Material de apoyo para el trabajo de los docentes en el ámbito del Programa de Matemática de Educación Básica.

y, a partir del uso de los colores presentados en la Figura 2, el Gráfico 3 representa una leyenda para los elementos del TAP presentes (directa o indirectamente) en su estructura.

- Objetivo(s) TM1: Identificar y desarrollar el patrón de secuencia de colores de un ciempiés;
- Objetivo(s) TM2: Identificar y analizar el patrón de secuencia de peones a través de una imagen;
- Objetivo(s) TM3: Analizar la variación del área del polígono BCDP, en función de la distancia del segmento $AP = x$, con el fin de determinar la gráfica que describe este comportamiento;
- Objetivo(s) TM4: Analizar el dominio y la imagen de la función $f(x) = ax+3$ a partir de su expresión algebraica y su gráfica.

Cuadro 3 – Leyenda de color de los elementos estructurales de TAP y posibilidades

Color del elemento				
Estructura y elementos del TAP	Actividad del profesor	Implicación de conceptos matemáticos	Movilización del conocimiento didáctico	
Color del elemento				
Estructura y elementos del TAP	Registros de práctica	Movilización del conocimiento matemático	Posibilidad de reflexión	Discusión colectiva

Fuente: Elaboración propia


En cuanto a su estructura, el TAP se dividió en dos partes: Parte 1 que consiste en un registro de prácticas (TM y/o registro de estudiante), y en ella corresponde al formador orientar respecto a los conocimientos matemáticos y didácticos que se pueden movilizar en esta sección; La Parte 2 se refiere a la práctica docente, y el análisis de la Parte 1 se realiza en paralelo a las discusiones y reflexiones mediadas por el formador docente. Las discusiones son esenciales para que se produzcan cambios en la comunicación matemática con respecto al estudio de un concepto a través de su definición (TABACH; NACHLIELI, 2015), y es importante señalar que no todas las discusiones tienen el potencial de un cambio relativo en la práctica (BARBOZA; PAZUCH; RIBEIRO, 2021; TABACH, NACHLIELI, 2015).

La discusión se desarrolla a partir de la presentación de los TAP elaborados, los cuales se enmarcan como materiales para la recolección de datos. En este artículo, no describiremos el proceso de ejecución de una TAP en el aula. Por lo tanto, no habrá inclusión de elementos empíricos, a pesar de representar un recurso potencial para desarrollar momentos formativos colaborativos.

Discusión y presentación de las TAP

Las TAP se presentan en dos figuras, la Parte 1 (Figura 3) referida a la MT y la Parte 2 (Figura 4) con las preguntas para el análisis y la reflexión. Cabe destacar que pueden acercarse al concepto de función de diferentes maneras, dependiendo de las discusiones y reflexiones que lleven a cabo los docentes y futuros docentes y de la acción del formador de docentes (BARBOZA; PAZUCH; RIBEIRO, 2021; RIBEIRO; PONTE, 2020).

Figura 3 – Parte 1: TAP – EFI / TAP – EFF / TAP – EM

TM1: Colores ciempiés 

Materiales necesarios: Plastilina, trozo de cuerda (o similar) y cuentas o abalorios de diferentes colores.


Desarrollo:


Paso 1: Crea un ciempiés con plastilina para que los alumnos, en círculo, identifiquen cómo se repiten los colores en el cuerpo del ciempiés, es decir, el patrón de la secuencia. Luego les pide a los estudiantes que continúen desarrollando el patrón aumentando el cuerpo del ciempiés.

Paso 2: En parejas, los estudiantes crean ciempiés con un motivo repetitivo para que su compañero de clase los descubra y continúe.

Paso 3: Los niños podrán grabar una de las secuencias que han diseñado.

Fuente: ADAPTADO de <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/>




TM2: Las travesuras de Pedrinho 

Materiales necesarios: Se pueden entregar objetos a los alumnos para que representen las peonzas.

Desarrollo:

Pedrinho es un chico muy inteligente y juguetón. También le gusta inventar misterios para que sus amigos los descubran. Mira la idea que tuvo:



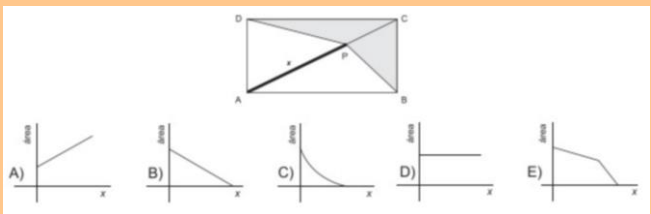
Presente las siguientes preguntas a los estudiantes para que puedan comentar y registrar conclusiones sobre la idea de Pedrinho:

- En estas imágenes, ¿qué observas?
- ¿Todas las peonzas son iguales?
- ¿Se repiten las peonzas en algún orden? ¿Qué descubriste?
- ¿Cuál era este secreto que Pedro usaba?
- Usando el secreto que descubriste, ¿cuáles serían las siguientes cifras?


Fuente: ADAPTADO de la Colección SBEM (Volumen 12, 2018)

TM3: OBMEP 2007 EDICIÓN:

¿Cuál de los gráficos a continuación describe la variación del área del polígono BCDP en función de la distancia $x = AP$?




Para llevar a cabo esta tarea matemática, se utilizará el software dinámico Geogebra. A continuación, se muestra la hoja de ruta para la construcción del polígono BCDP, elaborada por un profesor:



Fuente: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>

GUIÓN:



Los estudiantes deben trabajar en parejas o tríos para completar la construcción y luego explorar la construcción y registrar sus conclusiones para encontrar la respuesta.

- Cree los puntos A y B, en el mismo horizontal, y luego determine el segmento AB.
- Dibuja dos perpendiculares al segmento AB, por los puntos A y B.
- Marque un punto C en la perpendicular por B usando la herramienta "Punto en el objeto".
- Usando C, dibuja una perpendicular a la línea BC y crea el punto D, con la herramienta "Intersección de dos objetos", en la intersección con la otra perpendicular.
- Oculte las líneas y construya los segmentos BC, CD y DA.
- Construye la diagonal AC e inserta un punto P en ella.
- Usando la herramienta "Polígono", construye BCDP: luego haz clic en B, C, D, P y nuevamente en B para cerrar el bucle.
- Al hacer clic con el botón derecho en el polígono, en "Propiedades", cámbielo a "Mostrar etiqueta – Valor", para mostrar el valor numérico del área del polígono en la pantalla.
- Construya el segmento PA y asigne al título el nombre "x" y muéstrelo (a través del menú "Propiedades").

- Haga clic en Vista previa de la ventana 2 (para que el punto Q, que se va a construir, aparezca en esta nueva ventana) e ingrese el siguiente comando en la barra de entrada: $Q = (n, in1)$, donde n es el nombre del segmento PA y poll es la identificación del área del polígono BCDP.
Nota: Revise la ventana de álgebra para asegurarse de que el nombre sea correcto.
 - Mueva el punto P en la Ventana 1 y marque el punto Q para seguir una trayectoria en la Ventana 2.
 - Haga clic con el botón derecho en el punto Q, haga clic en "Habilitar ruta" y haga clic con el botón derecho en el punto P, haga clic en "Animar".

TM4: Prueba de opción múltiple

Sea una función con dominio real e imagen dada por $f(x) = ax + 3$. ¿Cuál es el valor de $f(9)$?

a) 6
b) 9
c) 10
d) 15
e) 18

A continuación, se presentan los dos tipos más comunes de resoluciones incorrectas de los estudiantes:

R1:

$f(x) = a \cdot x + 3$
 $f(3) = 3a + 3$
 $f(3) = 3.5 + 3$
 $f3 = 15 + 3 = 18$
 $f = 18/3$
 $f = 6$

R2:

$f(x) = a \cdot x + 3$
 $f(9) = a \cdot -3 + 3$
 $f(9) = a$
 $f = 9/a$
 $f = 9$

Fuente: Adaptado de Bortoli (2011, p. 45-46)

Figura 4 – Parte 2: TAP – EFI / TAP – EFF / TAP – EM

Parte 2: Análisis de Tareas Matemáticas (TM1, TM2, TM3 v TM4)

- 1) Resolver las tareas propuestas y registrar todos los procedimientos utilizados.
- 2) ¿Para qué año recomendaría la aplicación de TM1, TM2, TM3 y TM4? ¿Qué se está estudiando (contenido)?
- 3) ¿Qué dificultad(es) pueden presentar los estudiantes al realizar esta tarea?
- 4) ¿Qué objetivo(s) matemático(s) se puede considerar para el uso de TM1 y TM2?
- 5) Teniendo en cuenta lo que respondiste en los ítems anteriores, ¿usarías esta tarea en una clase de matemáticas? ¿Cómo pueden desarrollarlo? ¿Haría modificaciones/adaptaciones?

Análisis exclusivo para TM3)

- 6) Teniendo en cuenta los siguientes elementos:
 - Presentar correspondencias entre dos variables que puedan ser representadas en tablas, gráficos y diagramas.
 - Proporcionar resolución de problemas.
 Tomando los ítems como objetivos didácticos, ¿cómo se podrían trabajar dichos objetivos en el aula?
- 7) Desde otra perspectiva de abordaje del problema, el profesor tiene en sus manos el archivo Obmep_2007.ggb, representado en la siguiente figura.

7a) ¿Cómo evalúa el guión preparado por el profesor con respecto a la comprensión por parte de los estudiantes del paso a paso presentado?


7b) ¿Cómo usarías el archivo Obmep_2007.ggb en tus clases?

7c) ¿Cómo pueden abordar y discutir la resolución del problema, si el guión no fue proporcionado a los estudiantes y tuvieron que usar Geogebra para encontrar la solución?

Análisis exclusivo para TM4)

- 6) Explique qué puede haber llevado a los estudiantes a cometer tales errores en sus respuestas. Comenta y da retroalimentación a las respuestas incorrectas, señalando las similitudes y diferencias entre las resoluciones.

	Explicación de las respuestas incorrectas	Similitudes	Diferencias	Devolutiva
R1				
R2				

7) ¿Cómo puede el uso de recursos tecnológicos, más específicamente Geogebra, ayudar en la resolución del problema y la comprensión de la definición de la función? 

Fuente: Elaborado por los autores

TAP - EFI permite el uso de materiales manipulables diversificados, como arcillas de modelar, bloques lógicos, barras Cuisenaire, bloques entrelazados, diversas colecciones, entre otros. El recurso de los materiales manipulables se puede utilizar para componer secuencias físicamente. De acuerdo con Murari (2011), el uso de estos recursos permite un movimiento más dinámico cuando se acompaña de una discusión entre estudiantes y docentes, y la representación visual —de patrones de secuencia, en este caso— es la ilustración de la resolución de un problema.

TM1 y TM2 en TAP - EFI trabajan con secuencias a través de la disposición del cuerpo de un ciempiés y la posición en la que se encuentran los peatones. Se favorece el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional, considerando que las actividades realizadas por los estudiantes potencian la capacidad de *reconocer patrones en una secuencia – por la percepción de su regularidad, por la continuación de una secuencia repetitiva, por la correspondencia de una secuencia de objetos a una posición dada –* y el análisis de su discurso matemático, que se revela a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje (RIBEIRO; CURY, 2015).

La TAP – EFF establece una *conexión entre el contenido de la Función en el campo del Álgebra y el del campo de la Geometría*, ya que enumera *aspectos históricos del surgimiento del concepto de función* (GONÇALVES, 2015; SOUSA; MOURA, 2019), sin abordar explícitamente su definición (PONTE; BLANCO; MATOS, 2009). La propuesta de utilizar la herramienta Geogebra para resolver TM3 también proporciona la conexión entre el Álgebra y la Geometría al "relacionar la información dada algebraicamente con las representaciones gráficas y de tablas y presentar los objetos matemáticos en una representación más cercana a la habitual" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 16, nuestra traducción).

A través del análisis de TM3, propuesto por TAP – EFF, se puede animar a los profesores a discutir la comprensión del concepto de función a través de varias representaciones, como la transición entre grafos cartesianos, lenguaje algebraico y lenguaje geométrico. Al vincular el objetivo de asociar el concepto de *funciones al estudio de las*

propiedades de las diversas representaciones, es necesario que el concepto (de función) y su carácter integrador (a diversas representaciones) sean comprendidos por quienes lo enseñarán, y desarrollados de manera diversificada en el contexto del aula (GONÇALVES, 2015).

Las TAP *brindar la oportunidad de reflexionar sobre problemas pedagógicos*. La TAP-EM agrega discusiones sobre las resoluciones incorrectas de los estudiantes, con el fin de caracterizar el origen de las dificultades en la comprensión conceptual que llevaron al estudiante al error. Para comprender la TM4 es fundamental comprender la definición del concepto de función para la resolución de problemas y la percepción de los errores cometidos por el alumno. Con el uso de los PAT se pueden evidenciar posibles soluciones a problemas en la práctica pedagógica, ya que proporcionan un proceso de reflexión, intercambio y construcción de conocimiento colectivo (SILVER *et al.*, 2007).

Al analizar los tres TAP que se elaboraron, se destaca que en todos los TAP existen cuestiones que requieren la resolución de la MT y su adecuación a un determinado año de educación con el propósito de *determinar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico* del profesor, respectivamente. A partir de la identificación cromática de las estructuras y posibilidades del TAP, se enfatiza que, debido al color morado, todos los TAP son objeto de discusión colectiva, dependiendo de la forma en que el formador docente conduce el aprendizaje profesional del docente (BALL; COHEN, 1999; SMITH, 2001).

Los registros de prácticas (naranja) expresan una parte esencial de los objetivos del TAP, ya que concentran el tema de las posibles discusiones y las consecuentes reflexiones, que son la base para el aprendizaje profesional (BALL; COHEN, 1999; BARBOZA, 2019; SILVER *et al.*, 2007). Las referencias a la actividad del profesor (color verde), a la movilización del conocimiento matemático (color azul) y del conocimiento didáctico (color gris) y a la posibilidad de reflexión (color rosa) se concentran mayoritariamente en la segunda parte del TAP, que se dirige al análisis de los registros de prácticas (color naranja) y al acercamiento a los conceptos matemáticos a través de la TM (color amarillo).

Al respecto, Barboza (2019) revela que la elección de la estructura de la TAP es central en el proceso de aprendizaje del docente, de modo que experimenta la "formación de nuevas estructuras de conocimiento, combinando varias de sus esferas y potencialmente algunos nuevos conocimientos, ya sea individual o colectivamente" (p. 23, nuestra traducción). Por otro lado, la autora señala que las TAP, intrínsecamente, no tienen la capacidad de (re)significar y movilizar el conocimiento matemático y didáctico, y es fundamental reconocer las reflexiones

del docente que trabaja con ellos, a través de las preguntas del formador y las discusiones desencadenadas.

Considerando que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de funciones por parte de alumnos y docentes se verifica en la formalización del concepto de función y en las relaciones con las representaciones, la elaboración de tareas puede representar un desafío (GONÇALVES, 2015). De esta manera, enumerar las oportunidades para que los docentes destaquen en el TAP los objetivos matemáticos y las estrategias didácticas para la aplicación de la TM puede ampliar las posibilidades de desarrollo inicial y continuo del aprendizaje del docente a partir de la práctica.

Consideraciones finales

Este artículo tiene como objetivo *presentar y discutir Las desarrollado para el estudio del concepto de función*. En él se identificaron los elementos de la TAP y se evidenció que las discusiones y reflexiones sobre la práctica se dan a través del análisis del registro de esta práctica (BARBOZA, 2019) y bajo las preguntas cuyos desarrollos son guiados por el formador (BARBOZA; PAZUCH; RIBEIRO, 2021). El abordaje didáctico del concepto de función se adapta a cada nivel educativo, buscando el desarrollo gradual del pensamiento funcional, la familiaridad con las diferentes representaciones y la presentación formal de la definición (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

El intento de establecer una aproximación entre los componentes de la dimensión conceptual y la dimensión operativa, presentes en el Cuadro 1, a través de la PAT, tiene como objetivo resolver la demanda de estructuras compartidas para el desarrollo del estudio del aprendizaje de los docentes. En este aspecto, la TAP establece oportunidades para la formación inicial y continua de los docentes al (re)significar el conocimiento matemático y didáctico a través de una perspectiva interactiva e interconectada de la práctica.

La propuesta de desarrollar el aprendizaje profesional en un entorno con perfiles divergentes tiene como objetivo promover la formación de profesores de matemática a través de la planificación de tareas, la enseñanza a través de la práctica y la producción de conocimiento (GUMIERO; PAZUCH, 2019). Para una mejor comprensión del aprendizaje profesional y de la efectividad del uso de las TAP, es necesario utilizarlos como instrumentos de recolección de datos empíricos con un grupo heterogéneo. Por esta razón, se enfatiza que el establecimiento de estrategias para el aprendizaje profesional de los profesores de matemáticas

requiere renovaciones y nuevas alternativas a la práctica del profesor, y la TAP es un medio para reflexionar, en conjunto, sobre la elección de los recursos asociados a los objetivos e ideas matemáticas con los que se desea trabajar.

REFERENCIAS

BALL, D. L.; COHEN, D. K. Developing practice, developing practioners: toward a practice-based theory of professional education. *In*: SYKES, G.; DARLING-HAMMOND, L. (org.). **Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice**. San Francisco: Jossey Bass, 1999. p. 3-32.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, Thousand Oaks, v. 59, p. 389-407, 2008.

BARBOZA, L. C. S. **Conhecimento dos professores dos anos iniciais e o sinal de igualdade**: uma investigação com tarefas de aprendizagem profissional. 2019. 194 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, 2019.

BARBOZA, L. C. S.; PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. **Zetetiké**, Campinas, v. 29, p. 1-25, 2021. DOI: 10.20396/zet.v29i00.8656716.

BOAVIDA, A. *et al.* **A Experiência Matemática no Ensino Básico**: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Ministério da Educação. Lisboa: Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2008.

BORTOLI, M. F. **Análise de erros em matemática**: um estudo com alunos de ensino superior. 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2011. Disponible en: <http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/445>. Fecha de consulta: 03 abr. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017.

CUNHA, M. H. Saberes profissionais de professores de matemática. Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. **Revista Millenium**, n. 17, 2000. Disponible en: <https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/929> Fecha de acceso: 05 abr. 2022.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GONÇALVES, A. C. **Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos**. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2015.

GORZONI, S. P.; DAVIS, C. O conceito de profissionalidade docente nos estudos mais recentes. **Cadernos de Pesquisa**, v. 47, n. 166, p. 1396-1413, out./dez. 2017.

GUMIERO, B. S.; PAZUCH, V. Collaborative Work in Mathematics Teacher Education. **JIEEM**, v. 12, n. 3, p. 275-283, 2019. DOI: 10.17921/2176-5634.2019v12n3p275-283.

LAMPERT, M. Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 61, n. 1-2, p. 21-34, 2010.

MURARI, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.

NÓVOA, A. **Profissão Professor**. Porto: Porto Editora, 1991.

PIMENTA, S. (org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

PONTE, J. P. Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: TAVARES, J. (ed.). **Investigar e formar em educação**: Actas do IV Congresso da SPCE. Porto: SPCE, 1999. p. 59-72.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem matemática. In: PONTE, J. P. (org.). **Práticas profissionais dos professores de matemática**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-30.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação de Portugal, 2009.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN FILHO, N. Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. **International Journal for Studies in Mathematics Education (IJSME)**, v. 8, n. 2, p. 42-70, 2015.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 28, e020027, 2020. DOI: 10.20396/zet.v28i0.8659072.

ROLDÃO, M. C. A formação de professores como objecto de pesquisa – contributos para a construção do campo de estudos a partir de pesquisas portuguesas. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 1, n. 1, p. 50-118, 2007.

SILVER, E. A. *et al.* Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Springer Netherlands, v. 10, n. 4, p. 261-277, 2007.

SMITH, M. S. **Practice-based professional development for teachers of mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2001.

SOUSA, M. C.; MOURA, M. O. Estudo das historiografias de Paul Karlson, Konstantin Ríbnikov, Howard Eves e Bento de Jesus Caraça: diferentes modos de ver e conceber o conceito de função. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 25, n. 4, p. 1081-1099, 2019. DOI: 10.1590/1516-731320190040015.

STEIN, M. H.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. **Educação e Matemática**, n. 105, p. 22-28, 2009.

STEIN, M. K. *et al.* **Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development**. New York: Teachers College Press, 2009.

SWAN, M. The impact of task based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 10, p. 217-237, 2007.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 163-187, 2015.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. O Conceito de Função e sua linguagem para os professores de Matemática e de Ciências. **Ciência & Educação**, v. 8, n. 1, p. 1-12, 2002.

CRedit Author Statement

Reconocimientos: Agradecemos al Programa de Posgrado en Enseñanza e Historia de la Ciencia y las Matemáticas de la Universidad Federal del ABC, junto a sus profesores, especialmente a la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de Nivel Superior (CAPES), por las inversiones realizadas y por la oportunidad de realizar el curso. Así como a los colegas y docentes del grupo de investigación "Formación del Profesorado y Tecnologías Digitales en Educación Matemática" (FORTEMAT), por las experiencias de aprendizaje, la crítica constructiva y las discusiones beneficiosas compartidas.

Financiación: Esta investigación fue financiada por la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de Nivel Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamiento 001.

Conflictos de intereses: No hay conflictos de intereses.

Aprobación ética: Como la investigación no implica la recolección de datos empíricos, siendo solo una investigación teórica y bibliográfica, no hubo necesidad de someterla a un comité de ética.

Disponibilidad de datos y material: La presente investigación forma parte de una disertación en formato multipaper, titulada "EL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y FORMACIÓN DOCENTE: UN ESTUDIO DE LA LITERATURA ESPECIALIZADA", de autoría de uno de los autores de este artículo. Por lo tanto, los datos y materiales utilizados están parcialmente disponibles, con el fin de garantizar la originalidad de las revistas en las que se enviaron los artículos.

Contribuciones de los autores: La elaboración de la investigación responsable del desarrollo de las Tareas Profesionales de Aprendizaje (TAP) centrándose en el concepto de función para la formación inicial y continua de los docentes que enseñan matemáticas, así como este artículo, se desarrollaron de manera colaborativa entre los autores. En este aspecto, la autora **Caroline M. P. Lima** fue la encargada de realizar la revisión sistemática de la literatura y establecer los procedimientos metodológicos para llevar a cabo la investigación y construcción del TAP. Mientras que el autor **Vinicius Pazuch** actuó en la orientación de la elección de procedimientos y metodologías, así como en la organización de la investigación. Finalmente, ambos ayudaron en la dirección y evaluación de las consideraciones finales respecto a los aspectos teóricos, metodológicos y didácticos de las discusiones presentadas.

Procesamiento y edición: Editora Iberoamericana de Educación - EIAE.
Corrección, formateo, normalización y traducción.

