ESPECIFICIDADES DO CONHECIMENTO INTERPRETATIVO DO PROFESSOR E DAS TAREFAS PARA A FORMAÇÃO COMO ELEMENTOS PARA PRÁTICAS CRIATIVAS E MATEMATICAMENTE INOVADORAS

ESPECIFICIDADES DE LOS CONOCIMIENTOS INTERPRETATIVOS Y LAS TAREAS FORMATIVAS DEL DOCENTE COMO ELEMENTOS PARA PRÁCTICAS CREATIVAS Y MATEMÁTICAMENTE INNOVADORAS

SPECIFICITIES OF TEACHER'S INTERPRETATIVE KNOWLEDGE AND TASKS FOR TEACHER EDUCATION AS ELEMENTS FOR CREATIVE AND INNOVATIVE MATHEMATICAL PRACTICES

Miguel RIBEIRO[1]
e-mail: cmribas78@gmail.com

Caroline SILVA[2]
e-mail: caroldesouza86@gmail.com

Como referenciar este artigo:

RIBEIRO, M.; SILVA, C. Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das tarefas para a formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 19, n. esp. 2, e024073, 2024. e-ISSN: 1982-5587. DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553

| **Submetido em**: 06/10/2023
| **Revisões requeridas em**: 24/01/2024
| **Aprovado em**: 11/03/2024
| **Publicado em**: 20/07/2024

Editor: Prof. Dr. José Luís Bizelli
Editor Adjunto Executivo: Prof. Dr. José Anderson Santos Cruz

[1] Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas – SP – Brasil. Professor. Doutorado em Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimental (UHU/Espanha).
[2] Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas – SP – Brasil. Doutoranda do Programa da Pós-graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM/UNICAMP).

RESUMO: No contexto da formação de professores com foco nas especificidades do conhecimento especializado do professor, é evidente a necessidade de uma formação inovadora e, cientificamente, sustentada para desenvolver pesquisas com abordagens replicáveis que foquem as dimensões fundamentais para melhorar a qualidade das discussões e das aprendizagens matemáticas dos alunos. Considerando as especificidades da prática profissional do professor que possibilitam o entendimento dos alunos, a partir do conhecimento que possuem, é requerido um conhecimento especializado que permita escutar o Pensar matemático dos alunos – denominado Conhecimento Interpretativo – e esse conhecimento não se desenvolve na prática de sala de aula, requerendo contextos formativos com esse fito. Neste artigo, discutimos inovação associada às abordagens teóricas e metodológicas de pesquisa, à conceitualização das Tarefas para a Formação especializada (no âmbito das Transformações Geométricas Isométricas) e à abordagem metodológica associada à sua implementação em contextos imbricando formação e pesquisa.

PALAVRAS-CHAVE: Conhecimento Interpretativo. Tarefas para a Formação. Transformações Geométricas Isométricas.

***RESUMEN**: En el contexto de la formación docente con un enfoque en las especificidades del conocimiento especializado del docente, se evidencia la necesidad de una formación innovadora y científicamente sustentada para desarrollar investigaciones con enfoques replicables que se centren en las dimensiones fundamentales para mejorar la calidad de las discusiones y el aprendizaje matemático de los estudiantes. Considerando las especificidades de la práctica profesional docente que posibilitan la comprensión de los estudiantes, a partir de los conocimientos que poseen, se requiere un conocimiento especializado que permita escuchar el pensamiento matemático de los estudiantes – llamado Conocimiento Interpretativo – y este conocimiento no se desarrolla en la práctica del aula, requiriendo contextos formativos con este propósito. En este artículo, discutimos la innovación asociada a los enfoques teóricos y metodológicos de la investigación, la conceptualización de las Tareas para la Formación Especializada (en el ámbito de las Transformaciones Geométricas Isométricas) y el enfoque metodológico asociado a su implementación en contextos que entrelazan la formación y la investigación.*

***PALABRAS CLAVE**: Conocimientos interpretativos. Tareas para la formación. Transformaciones geométricas isométricas.*

***ABSTRACT**: In the context of teacher education focusing on the specificities of teachers' specialized knowledge, it's evident the need for innovative and scientifically supported proposals for research with replicable approaches focusing on the foundational dimensions to improve the quality of discussions and students' mathematical learning. Considering the specificities of teacher's practices that enable students to understand, in order to be able to assume has a starting point the students' knowledge, a specialized knowledge that allows listening to students' mathematical thinking is required – called Interpretive Knowledge. This specialized knowledge is not developed during practice, requiring teacher education contexts with such a purpose. In this paper, we discuss innovation associated with theoretical and methodological research approaches, the conceptualization of Tasks for Teacher Education (within the scope of Isometric Geometric Transformations) and the methodological approach associated with its implementation in contexts intertwining teacher education and research.*

***KEYWORDS**: Interpretive Knowledge. Tasks for Teacher Education. Isometric Geometric Transformations.*

Introdução

Pensar e fazer inovação – em termos de resultados ou de processos – tem de estar associado a efetuar algo que ainda não foi feito, a fazer de forma diferente do usual, ou ambos. No contexto da Educação Matemática que busca uma melhoria dos resultados dos alunos em matemática, a inovação não pode ser entendida como mudar abordagens pedagógicas e continuar no mesmo espaço de discussão matemática, mas demanda considerar como prioritário mudar formas de pensar e desenvolver o conhecimento matemático dos alunos. Essa inovação requer uma prática profissional especializada e matematicamente inovadora.

A prática do professor de matemática é sustentada em tarefas, em prepará-las e implementá-las com os alunos (Mason; Johnston-Wilder, 2006). Cada tipo de tarefas (Ponte, 2005), porém, associa-se a diferentes objetivos e à determinada forma de entender o papel do professor e dos alunos (Stein *et al*., 2000; Watson; Sullivan, 2008). Dentre a diversidade de tipos e de formas de tarefas – de introdução, de consolidação, de revisão, de avaliação, envolvendo exercícios, resolução de problemas, formulação de problemas, ou investigações – a nossa priorização para pensar e fazer inovação direciona-se a tarefas de introdução de tópicos - por serem os momentos em que o professor mobiliza de forma mais acessível o seu conhecimento (Ribeiro, 2013; Ribeiro; Carrillo; Monteiro, 2012; Shoenfeld, 2000) – e associadas à resolução e formulação de problemas (ou investigações) por serem os contextos que levam a que os alunos tenham de pensar matematicamente de forma nunca antes feita, ou não seriam verdadeiros problemas.

Considera-se também um paralelismo entre a prática do professor com os alunos e a prática formativa do formador, tanto em termos metodológicos de possibilitar que o professor vivencie o que se espera que possa, posteriormente, propiciar aos seus alunos (assumimos que o conhecimento pedagógico não se ensina, vivencia-se) como em termos matemáticos, pois o professor tem de passar a entender matemática e a pensar matematicamente de modo que seja possível, posteriormente, propor tarefas e efetuar discussões que permitam desenvolver as formas de pensar matematicamente dos alunos, e isso demanda fazer diferente do que tem sido feito, ou não seria necessário esse foco na formação. Para desenvolver uma formação especializada de professores especializados, consideramos as denominadas Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) como um recurso pedagógico especializante e especializado, tendo em vista o modo como assumimos o nosso papel enquanto professores, o papel dos alunos e o papel dos formadores. Cada TpF é acompanhada de um conjunto de outros três documentos (que, em conjunto, os quatro constituem as Tarefas

Formativas) que sustentam e apoiam a formação especializada que persegue objetivos de desenvolver o conhecimento especializado do professor e a transformação das suas práticas matemáticas em algo pedagogicamente emocionante e matematicamente inovador, possibilitando que os alunos tenham prazer em aprender, pois entendem o que fazem e por que o fazem, a cada momento e com conexões futuras. Esse foco prioritário da formação no conhecimento especializado do professor considera o fato de esse conhecimento ser, de entre os fatores controláveis, aquele que mais impacta nas aprendizagens e resultados dos alunos (Baumert *et al*., 2010; Grossman, 2010; Nye; Konstantopoulos; Hedges, 2004).

Dentre a panóplia de formas de considerar o conhecimento do professor – desde uma perspectiva que foca as generalidades (Ribeiro, 2018) até uma que concebe as especificidades, assumimos esta última. Nesse sentido, buscamos romper com vários dos pressupostos instituídos e implementados ainda hoje na formação de professores – generalidades, tais como a de que basta ter sido aluno da etapa educativa que se vai ensinar e replicar a experiência para ensinar (ausência de qualquer discussão na formação inicial sobre os tópicos que terão de ser ensinados); a de que é suficiente saber fazer (formação de futuros professores e de futuros matemáticos comuns) e com caráter instrumental (Lopes *et al*., 2022); a de que, para melhorar os resultados, é suficiente mudar as metodologias para as mais "atrativas" (formações com foco nas metodologias "da moda" sem discussão matemática) – e assumimos o conhecimento do professor como especializado na perspectiva das conceitualizações teóricas do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[3] – MTSK (Carrillo *et al*., 2018) e Conhecimento Interpretativo – CI (Di Martino; Mellone; Ribeiro, 2020; Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014; Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013).

Assumimos, de forma associada, uma perspectiva de inovação também em termos metodológicos de implementação das TpF em contextos formativos e para a pesquisa, assumidas de forma imbricada. Considera-se como abordagens metodológicas de implementação das TpF os ciclos formativos Individual-Coletivo-Individual – ICI (Pacelli *et al*., 2020) ou Pequeno grupo-Coletivo-Pequeno grupo – Pg-C-Pg (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2022; Mellone *et al*., 2023), como um processo que permite que a inovação em termos de resultados seja concretizada pelo foco dos diferentes tipos de discussões individual-coletiva.

Neste texto, efetuamos uma discussão teórica sustentada em exemplos de propostas para a pesquisa e para a formação, ambas especializadas, não discutindo a abordagem metodológica

[3] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por esta já ser reconhecida internacionalmente e a tradução poder acarretar uma dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.

de pesquisa que desenvolvemos, mas focando aqui a atenção nas dimensões da inovação educacional que se consideram. Discutimos inovação em três dimensões: (i) teóricas (formas de entender o conhecimento do professor); (ii) de recursos para coleta de informações (Tarefas para a Formação) e de desenvolvimento do conhecimento especializado do professor (Tarefas para a Formação e Tarefas Interpretativas); e (iii) abordagem metodológica de implementação das Tarefas para a Formação e de conceitualização das Tarefas Formativas para maximizar a qualidade das discussões e a sustentabilidade do desenvolvimento do conhecimento especializado do professor. Para essa discussão, trazemos um exemplo de uma Tarefa Formativa e a TpF associada à transformação isométrica rotação. Esse exemplo serve como ente gerador de discussão e promotor de entendimento, pois a experiência mostra que qualquer inovação demanda romper com as correntes que nos restringem (Ribeiro, 2013) e fazer o que ainda não foi feito e, ao apresentar exemplos concretos que permitem sustentar as discussões, espera-se que possa levar o leitor a, partindo dessa especificação, chegar a uma generalização das ideias apresentadas.

Algumas discussões teóricas

Os alunos têm dificuldades em vários tópicos matemáticos (Clements; Sarama, 2020; Kieren, 1976; Ma, 1999) e, de forma mais geral, dificuldades em Pensar e em Pensar matematicamente. Dentre os temas em que revelam maiores dificuldades está a Geometria e, dentro desta, as transformações geométricas isométricas assumem um lugar de destaque, não só pelas dificuldades (ver por exemplo, Bairral; Silva, 2010; Gaspar; Cabrita, 2014; Küchemann, 1981), mas pelas conexões que podem (e deveriam) ser estabelecidas com outros temas e tópicos matemáticos e extra matemáticos, de modo a potenciar o desenvolvimento desse Pensar matematicamente em termos de entender a estrutura matemática e os elementos que sustentam a demonstração e a generalização.

A rotação é uma das três transformações geométricas isométricas (as outras são reflexão e translação) e por ser isométrica preserva distâncias (Lima, 1992) e amplitude de ângulos, o que acarreta a congruência entre a figura original e a imagem transformada. Dentre as transformações isométricas é considerada a mais difícil para os alunos compreenderem (Gomes, 2012; Moyer, 1978), principalmente, quando o centro de rotação é externo à figura (Gaspar; Cabrita, 2014; Küchemann, 1981); porém, seu entendimento é essencial para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico, incluindo a imaginação intuitiva (Jones, 2020), a percepção visual e o raciocínio espacial (Gomes, 2012), o que contribui para que os alunos interpretem o mundo ao seu redor.

Quando pensamos nas formas como os alunos aprendem, compreendemos que essas aprendizagens ocorrem associadas a tarefas para os alunos, que podem ser entendidas de diferentes formas, de acordo com os diferentes tipos de tarefas (Ponte, 2005) – abertas, fechadas, problemas, investigações. Em relação aos problemas (e as investigações, como problemas mais amplos), podemos considerar uma estrutura de quatro etapas para a sua resolução (Polya, 1975). É essencial que estes tipos de tarefas e de etapas para a resolução de problemas seja discutida na formação de professores para que possam passar a ser algo natural nas práticas do professor e, uma vez que, ainda hoje, quase 50 anos depois dos estudos de Polya, essa ideia da prática sustentada na resolução de problemas pode ser entendida como uma inovação, inclusive diante das dificuldades dos alunos para resolver problemas em diferentes tópicos matemáticos (Francioli; Silva, 2021).

Considerando que a prática matemática do professor sustenta-se na implementação e discussão de tarefas matemáticas (ver, por exemplo, Mason e Johnston-Wilder, 2006; Ribeiro, Mellone e Jakobsen, 2016) e a necessidade de que os professores tenham o mesmo tipo de experiências que se espera que possam facultar aos seus alunos, é essencial que a formação de professores se desenvolva no mesmo espaço de práticas que se espera que venha a ser implementadas com os alunos (Ribeiro; Carrillo; Monteiro, 2012) e, portanto, que se sustente na preparação, implementação e discussão de tarefas que contribuam para desenvolver as especificidade do conhecimento do professor para a sua prática profissional. Torna-se, assim, fundamental que a formação de professores possibilite a criação de pontes que diminuam a distância entre a matemática que os professores aprenderam e a matemática que se espera que eles possam ensinar aos seus alunos (Zaslavsky; Leikin, 2004). Essas tarefas e oportunidades associadas necessitam considerar um foco nos processos matemáticos (Biza *et al.*, 2015) com o objetivo de possibilitar que os professores possam transformar o seu conhecimento matemático em práticas matemáticas pedagogicamente orientadas (Wasserman *et al.*, 2022).

Nesse sentido, é essencial um conjunto de abordagens inovadoras que considerem um foco nas questões da gestão matemática da sala de aula possibilitando que as discussões em contexto formativo se aproximem de um cenário autêntico de ensino e de aprendizagem esperado, perseguindo o objetivo de garantir que sejam priorizadas as aprendizagens matemáticas dos alunos e não o conteúdo matemáticos por si mesmo (Mitchell; Marin, 2015) ou as questões pedagógicas gerais sem qualquer relação com as aprendizagens (Ribeiro, 2018).

Considerando a centralidade das tarefas nas aprendizagens matemáticas dos alunos, também a formação de professores deverá assumir essa centralidade e considerar as especificidades da "prática profissional" de cada um dos envolvidos (alunos e professores) e das especificidades do conhecimento profissional do professor para essa prática matemática de possibilitar que os alunos entendam matemática.

Essas especificidades da prática do professor têm sido entendidas desde uma perspectiva que assume a centralidade do conhecimento pedagógico geral – sem qualquer referência aos conteúdos abordados (ver Shulman, 1986, 1987) – e que pode ser entendido como uma forma de diferenciar o "cluster professor" de todos os outros "clusters profissionais", mas ficar nestas generalidades pouco ou nada ajuda a pensar as especificidades da prática do professor de matemática em relação aos outros professores de outras área de conhecimento (Ribeiro, 2018). No sentido de direcionar a atenção para essas especificidades, é essencial considerar o que torna única a prática profissional do professor de matemática. Essa unicidade está associada ao seu conhecimento profissional para ensinar matemática e ao fato de esse conhecimento ser considerado único e específico para essa atuação profissional – algumas das perspectivas teóricas que assumem essa ideia são, por exemplo, o *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008), o *Knowledge Quartet* – KQ (Rowland *et al*., 2009), o *Mathematics for Teaching* – MfT (Davis; Simmt, 2006), o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo *et al*., 2018) e o Conhecimento Interpretativo – CI (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014). No escopo deste trabalho, assumimos as conceitualizações *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* e o Conhecimento Interpretativo, que partem do princípio de que o conhecimento do professor é especializado no domínio matemático e pedagógico.

O MTSK é uma conceitualização do conhecimento do professor de matemática e permite (busca) caracterizar detalhadamente as especificidades do conteúdo desse conhecimento considerando dois domínios: *Mathematical Knowledge* (MK) e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Discutiremos aqui apenas o conteúdo do MK[4] que é subdividido em três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Para trazer exemplos do conteúdo desse conhecimento, optamos por focar a rotação, por ser um tópico problemático nos aspectos

[4] Para mais informações sobre o conteúdo do PCK nesta conceitualização ver, por exemplo, Ribeiro e Almeida (2022) e Ribeiro, Alves e Gibim (2023) que ilustram também uma perspectiva inovadora em termos da forma e foco de discussão de diálogo da pesquisa e propostas para os professores.

relativos ao ensino e à aprendizagem (ver, por exemplo, Gaspar e Cabrita, 2014 ou Küchemann, 1981).

O KoT corresponde ao conhecimento matemático do professor relativo aos tópicos matemáticos a serem ensinados, incluindo o conhecimento procedimental e conceitual, bem como das proposições, exemplos, conexões intraconceituais, fórmulas e algoritmos, consequentemente das suas demonstrações e os significados que se associam ao conhecimento da fenomenologia de cada tópico (Liñan; Contreras; Barrera, 2016). Consideram-se quatro categorias de conhecimento: (i) procedimentos; (ii) definições, propriedades e fundamentos; (iii) registros de representação; (iv) fenomenologia e aplicações.

(i) procedimentos, referem-se ao conjunto de ações sequenciais efetuadas para se obter uma resposta a um determinado problema, podendo ser por meio de algoritmos (convencionais ou alternativos) ou valendo-se de outras estratégias. No âmbito da rotação, por exemplo, relaciona-se a conhecer que, para identificar o centro de rotação de uma figura já transformada, é necessário traçar a mediatriz entre um ponto da figura original e seu correspondente na imagem, repetindo esse procedimento (pelo menos) duas vezes, de modo a obter o ponto de intersecção das mediatrizes traçadas, que corresponde ao centro de rotação.

As (ii) definições contemplam o conhecimento sobre o conjunto mínimo de propriedades do tópico que permitem identificá-lo univocamente (Liñan; Contreras; Barrera, 2016). Envolve conhecer que uma possível definição de rotação é:

> Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O. A *rotação* de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha}: \Pi \rightarrow \Pi$ assim definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Π, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que
> $$d(X,O) = d(X',O), X\hat{O}X' = \alpha$$
> e o "sentido de rotação" de A para B é o mesmo de X para X' (Lima, 1996, p. 21-22).

Ao considerar as (ii) propriedades, assume-se o conhecimento do professor associado a conhecer o conjunto de todos os atributos matemáticos que são comuns ao tópico. Incluí conhecer que a composição de duas rotações de mesmo centro de rotação é comutativa, bem como a composição de duas rotações de centros distintos não é comutativa (Breda *et al*., 2011).

Os (ii) fundamentos relacionam-se com o conhecimento sobre o conjunto de atributos matemáticos que "sustentam" o tópico e conectam conceitos (Camacho; Guerrero, 2019). Relativamente à rotação, refere-se a conhecer que seus fundamentos são a figura original, o centro e o ângulo de rotação (amplitude e sentido).

Nos (iii) registros de representação, incluem conhecer os diferentes modos de representar um tópico, conceito, processo ou procedimento (Liñan; Contreras; Barrera, 2016), podendo ser registros aritmético, concreto, gráfico, pictórico, envolvendo linguagem verbal ou simbólica (Duval, 1996). Envolve conhecer que a rotação de um triângulo com vértices X, Y e Z com centro de rotação em O a partir de um ângulo de 60° no sentido anti-horário pode ser representada algebricamente por $R_o\ [(X, Y, Z), 90°]$.

A (iv) fenomenologia e aplicações relaciona-se a conhecer os conceitos associados a um determinado tópico e aos diferentes fenômenos que o envolvem, bem como o significado de cada uma das possíveis manifestações e interpretações desses fenômenos, conforme os diferentes contextos para ensiná-lo (Liñan; Contreras; Barrera, 2016). Como exemplo de conhecimento relativo à fenomenologia da rotação, tem-se que a rotação é uma transformação geométrica isométrica em que se efetua uma transformação (fenômeno) na figura.

O subdomínio KSM refere-se ao conhecimento das diferentes conexões entre tópicos matemáticos (Carrillo *et al.*, 2018), considerando os aspectos temporais de sequenciação matemática: (i) conexões de complexificação e (ii) conexões de simplificação; e os aspectos de cada tópico: (iii) conexões transversais e (iv) conexões auxiliares (Montes; Climent, 2016).

As conexões (i) de complexificação envolvem o conhecimento que possibilita ao professor, efetuar relações com outros tópicos matemáticos mais avançados do que é requerido pelo contexto escolar. No âmbito da rotação, refere-se a conhecer a conexão de complexificação entre rotação e círculo trigonométrico, uma vez que, por meio da rotação do triângulo retângulo no círculo trigonométrico, é possível reduzir as razões trigonométricas do 3.º quadrante para o 1.º quadrante.

As (ii) conexões de simplificação referem-se ao conhecimento que permite o professor incluir na discussão um tópico ou conceito mais simples do que é requerido pelo contexto escolar. Envolve conhecer a conexão entre rotação e ângulo, na qual rotacionar uma figura a partir de um ângulo de 90° equivale a um giro de $\frac{1}{4}$ de volta na figura.

No que se refere às (iii) conexões transversais, essas relacionam-se com o conhecimento da natureza de alguns conceitos, que emergem ao abordar diferentes conceitos ao longo da matemática escolar. Como exemplo de conexão transversal entre rotação e simetria tem-se que a imagem obtida após a transformação é simétrica, pois a simetria é um conceito transversal às transformações geométricas isométricas.

Em relação às (iv) conexões auxiliares, referem-se às conexões matemáticas envolvendo diferentes tópicos, que não são foco da discussão, acrescentando um elemento para contribuir e sustentar a discussão matemática. Como exemplo, a conexão auxiliar entre rotação e localização de pontos envolve conhecer que, para efetuar a rotação, é preciso identificar o centro de rotação, que é um ponto que pode estar localizado no plano cartesiano.

O KPM refere-se ao conhecimento da prática de produzir matemática, seu funcionamento e não a como ensiná-la, envolvendo a classificação e planejamento, as formas de validação e demonstração, o papel dos símbolos, da linguagem formal e as condições necessárias e suficientes para gerar definições (Carrillo *et al*., 2018). Inclui o conhecimento do uso e funcionamento dos exemplos e contraexemplos (Flores-Medrano, 2016) e como demonstrar, justificar, fazer deduções e induções (Carrillo *et al*., 2018). No âmbito da rotação, refere-se a conhecer que um contraexemplo de rotação é a reflexão axial, pois a reflexão axial é efetuada em relação a uma reta denominada eixo de reflexão e não de acordo com um ângulo. Assim, os procedimentos utilizados para efetuar a reflexão são diferentes dos procedimentos utilizados para efetuar a rotação.

Este conhecimento matemático fundamenta a prática profissional do professor de matemática que busca possibilitar que os alunos entendam o que fazem e por que o fazem a cada momento e, na perspectiva que assumimos, isso demanda considerar como ponto de partida o que e como os alunos conhecem de cada um dos tópicos matemáticos a que têm o direito e dever de conhecer e entender. O conhecimento matemático especializado para essa prática interpretativa é denominado de Conhecimento Interpretativo – CI (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013; Di Martino; Mellone; Ribeiro, 2020; Mellone *et al*., 2020).

A importância de assumir como ponto de partida o que e como os alunos conhecem como premissa do CI é essencial para uma efetiva discussão ética em sala de aula (Mellone *et al*., 2023), sendo esse um dos desafios do campo da Educação Matemática (Radford, 2021), e envolve fazer com que às discussões matemáticas se associem as oportunidades de inclusão, compromisso e respeito, na mesma perspectiva da ética comunitária (Radford, 2021), para uma abordagem de ensino direcionado para o entendimento da matemática.

Segundo a Enciclopédia Springer Nature, o Conhecimento Interpretativo:

> Refere-se ao conhecimento matemático amplo e profundo que permite aos professores apoiarem os alunos no desenvolvimento de seu próprio conhecimento matemático tendo como ponto de partida seus próprios raciocínios e produções, independentemente de serem não standard ou incorretas. O CI complementa o conhecimento de erros típicos ou estratégias dos alunos, com o conhecimento de possíveis origens de erros típicos e atípicos e o conhecimento do uso dos erros como uma efetiva fonte de aprendizagem (Di Martino; Mellone; Ribeiro, 2020, p. 426, tradução nossa).

O CI proporciona ao professor entender a matemática que sustenta os raciocínios e formas de Pensar dos alunos presentes em suas produções, de modo a explorar os erros, entendidos como oportunidades de aprendizagem (Borasi, 1987) e realizar orientações com base no significado atribuído. Nesse Conhecimento que sustenta a prática matemática interpretativa, consideram-se duas noções centrais: espaço solução e *feedback*.

O espaço solução refere-se ao conjunto de múltiplas formas e representações que cada indivíduo concebe quando é solicitado que resolva um problema – mesmo que esse problema possua uma única solução (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014). É essencial que o professor conheça diversas maneiras de proceder para resolver um problema para que, ao se deparar com uma produção de aluno diferente da sua, não possua dificuldades em interpretá-la e não a considere como incorreta apenas por ser diferente da sua – cumpre-nos deter, portanto, um espaço solução com uma multiplicidade de elementos.

Após entender e interpretar a produção, o professor deve propor uma orientação ao aluno, que se configura como um *feedback* – forma de comunicação e interação entre professor e aluno (ver, por exemplo, Black e William, 1998 ou Hattie e Timperley, 2007). Existem diferentes tipos de *feedback* e, quando o professor objetiva explorar o raciocínio matemático presente na produção (Santos; Pinto, 2009), propondo orientações claras que estimulem o aluno rever sua produção, repensar as estratégias utilizadas e desenvolver seu entendimento matemático, trata-se de um *feedback* construtivo (Di Martino *et al*., 2017). Outros tipos de *feedback* (Galleguillos; Ribeiro, 2019) são: (i) *feedback* sobre como resolver o problema – orientações instrutivas de procedimentos a serem seguidos para resolverem um problema específico; (ii) *feedback* confuso – apesar de correto é incompreensível para o aluno devido à complexidade das orientações; (iii) contraexemplo como *feedback* – contém um exemplo explicativo do porquê a resolução do aluno é incorreta; (iv) *feedback* superficial – orientação insuficiente ou inconsistente, que não ajuda o aluno entender seus erros.

As categorias (i) e (ii) associam-se a uma prática instrutiva, explicitando ao aluno como proceder, o que não requer que o professor atribua significado ao Pensar matemático dos alunos, impondo a sua forma de fazer. As categorias (iii) e (iv) estão associadas a práticas avaliativas e focam em explicar por que a produção dos alunos contém erros, porém demandam do professor uma interpretação correta da produção, requerendo um conhecimento matemático que permita ao professor abordar um problema de diferentes maneiras e envolve que ele conheça diversos exemplos para que possa explicar o porquê de alguns modos de proceder serem incorretos.

No âmbito da rotação, considerando uma tarefa em que é solicitado identificar algum ponto que se mantém fixo, quando se efetua o movimento (rotação) e uma produção de aluno que expressa "não tem pontos fixos" (Silva; Ribeiro, 2023), um exemplo de *feedback* avaliativo envolve o professor apenas avaliar a produção como incorreta, pois não identificou o ponto fixo que é o centro de rotação e indicar na produção o ponto correto. Um *feedback* construtivo tem de considerar identificar o centro de rotação, propondo, por exemplo, ao aluno, uma orientação para traçar algumas mediatrizes entre alguns pontos da figura e seus correspondentes na imagem, com o intuito de que ele reveja sua produção e identifique o centro de rotação, encontrando-se essa orientação associada a questionamentos sobre o que acontece com todas as mediatrizes e se elas se intersectam, possibilitando assim que o aluno possa perceber que elas se intersectam em um único ponto comum, que é o centro de rotação.

Este *feedback* está associado, e é condicionado, pelo nível de conhecimento que o professor detém e sobre o qual, no CI, define-se três níveis (Mellone *et al.*, 2017): (i) interpretação avaliativa; (ii) interpretação para a prática letiva; (iii) interpretação como pesquisa.

A (i) interpretação avaliativa associa-se ao nível mais baixo de CI que leva o professor a estabelecer uma correspondência entre a sua produção e a do aluno, considerando apenas seu modo de proceder como correto e toda produção que difere da sua é avaliada como incorreta. A (ii) interpretação para a prática letiva sustenta-se em um nível intermediário de CI e corresponde ao professor considerar o que é expresso na produção do aluno, para realizar o planejamento das próximas discussões a serem propostas e alcançar os objetivos de aprendizagens matemáticas; logo, assume como ponto de partida o que e como os alunos revelam conhecer. Considerando um nível mais elevado de CI, temos a (iii) interpretação como pesquisa que se refere ao professor rever sua própria formalização matemática, fazendo da produção do aluno uma fonte de pesquisa, ainda que essas produções pareçam diferentes do que é tradicionalmente ensinado nas escolas, uma vez que, nessa prática interpretativa, o professor pode discutir com os colegas a produção do aluno e, inclusive, pesquisar outras formas de proceder, o que possibilita passar a conhecer outros modos de fazer matemático e resolver um determinado problema, acarretando na ampliação do seu espaço solução.

Para propor um *feedback* construtivo é requerido do professor um elevado nível de CI, sendo que o desenvolvimento do conhecimento especializado do professor demanda de contextos formativos (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013) em que se implementam e discutem Tarefas para a Formação (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021).

Existem diferentes perspectivas sobre Tarefa para os professores, como as Tarefas de Aprendizagem Profissional (Smith, 2001; Ribeiro; Ponte, 2020) ou as tarefas formativas (Martín *et al*., 2023). Uma vez que o nosso foco é no desenvolvimento de conhecimento do professor e não nas suas aprendizagens, as tarefas são compreendidas como um recurso especializante para a prática profissional, logo as denominadas Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) são específicas para o desenvolvimento desse conhecimento especializado do professor.

As TpF formam parte de um conjunto de documentos que são elaborados para sustentar a formação a ser realizada e que corresponde, na conceitualização desenvolvida no grupo CIEspMat[5], a denominada Tarefa Formativa (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) que é composta por quatro documentos: (i) Tarefa para a Formação; (ii) documento com as cinco dimensões centrais para a implementação da tarefa em sala de aula; (iii) documento do professor e (iv) documento do formador.

(i) Tarefa para a Formação: tarefa a ser entregue aos professores em contextos formativos e conceitualizada para aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo e Especializado dos formandos. Para a sua conceitualização, consideram-se os mais recentes resultados de pesquisa e resultados das provas nacionais e internacionais, que identificam os tópicos matemáticos mais problemáticos para os alunos (e, portanto, também para os professores) – em que, por exemplo, a resolução e formulação de problemas não são tópicos, mas considerados contextos de e para discussão dos tópicos matemáticos, e é estruturada em duas ou três partes. Todas as partes associam-se a objetivos de aceder e desenvolver o conhecimento do professor, sendo que esse aceder relaciona-se com a abordagem pedagógica especializada de implementação e com a pesquisa que sempre ocorre nos contextos formativos, considerando pesquisa e formação de forma imbricada. A parte Preliminar foca alguma dimensão do conhecimento matemático ou pedagógico e busca estabelecer um ponto de partida para as discussões a serem efetuadas – o que e como o professor conhece do tópico, o que já faz na sua prática matemática e como faz. A parte I é estruturada a partir de uma tarefa para o aluno a qual que se espera que o professor possa implementar na sua prática, mas contempla também um conjunto de questões emergentes das problemáticas identificadas na literatura sobre

[5] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. Disponível em: www.ciespmat.com.br. Acesso em: 10 dez. 2023.

o conhecimento do professor e que são formuladas alinhadas ao conteúdo de determinado(s) subdomínio(s) do MTSK de modo a possibilitar focar as discussões.

É importante notar que esta é uma opção formativa que permite direcionar prioritariamente o foco de atenção para as especificidades da prática matemática e do conhecimento especializado que sustenta essa prática, e que, apesar desse foco direcional, a implementação da TpF possibilita que, pela experiência vivenciada, os professores possam efetuar discussões envolvendo todos os subdomínios do seu conhecimento especializado.

Quando a TpF contém uma parte II tem por objetivo desenvolver o Conhecimento Interpretativo e denomina-se de Tarefa Interpretativa – TI (Mellone *et al*., 2020). Nessa parte II, incluem-se alguns contextos de produções de alunos ou de professores (escritas, em vídeo, discussões de sala de aula, discussões em contextos formativos) escolhidas por se mostrarem matematicamente potentes para desenvolver o CI e pela atribuição de significado às formas de pensar que sustentam essas produções e proposição de um *feedback* construtivo.

(ii) documento com as cinco dimensões: conjunto de indicações centrais para o professor implementar, discutir e atingir os objetivos de aprendizagens matemáticas da tarefa para o aluno (por exemplo Ribeiro e Torrezan, 2022 ou Silva e Ribeiro, 2023): (1) Objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa; (2) Recursos necessários e forma(s) de trabalho dos alunos; (3) Habilidade da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) associada à tarefa; (4) Possíveis dificuldades dos alunos; (5) Comentários para a implementação e discussões matemáticas associadas.

(iii) documento do professor: engloba todos os elementos centrais do conhecimento matemático especializado do tópico, considerando a conceitualização do MTSK, abordado na TpF que se almeja desenvolver nos professores participantes da formação.

(iv) documento do formador: contém um conjunto de orientações para que o formador possa implementar a TpF minimizando os desvios dos objetivos formativos que se encontram, associados à sua conceitualização, considerando a intencionalidade de pesquisa associada. Contém, portanto, os objetivos formativos e de pesquisa, bem como um conjunto de indicações relativas às especificidades da formação que se pretende realizar, detalhando os objetivos de cada questão da TpF e o Conhecimento Especializado e Interpretativo que se espera desenvolver, bem como indicações pedagógicas específicas de implementação que se associam a possibilidades de replicabilidade em contextos de prática com os alunos – ou brincadeiras com as crianças da Educação Infantil. Inclui também exemplos de perguntas e possíveis respostas do conhecimento envolvido e requerido e das discussões a serem realizadas em cada etapa[6].

Esta tríade central para a inovação que consideramos na pesquisa, prática e formação é composta por estes dois blocos anteriores de Conhecimento (formas de entender o conhecimento do professor e as suas especificidades para a prática, formação e pesquisa) e de recursos para a prática, formação e coleta de informação para pesquisa, apenas fica completa com uma abordagem pedagógica de implementação e metodológica que maximize e potencie a qualidade das discussões, a sustentabilidade do desenvolvimento do conhecimento especializado do professor e a pesquisa associada.

Essa abordagem pedagógica e metodológica especializada que temos desenvolvido e que impacta os focos de discussão que se consideram, assume dois tipos de estrutura replicável: Ciclo Individual-Coletivo-Individual – ICI (Pacelli *et al*., 2020) ou Ciclo Pequeno grupo-Coletivo-Pequeno grupo – Pg-C-Pg (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2022; Mellone *et al*., 2023). A diferença entre essas estruturas está na forma de trabalho de resolução da TpF, pois no Ciclo ICI os professores resolvem uma parte da TpF individualmente, ocorre posteriormente uma discussão coletiva em grande grupo que busca sintetizar as formas de Pensar que emergiram individualmente e em que todos se tornam responsáveis pelo conhecimento desenvolvido nesse contexto e, posteriormente, cerca de um mês, os participantes devem enviar as suas respostas "revistas e melhoradas" para a mesma TpF para que possam ser identificados alguns elementos ainda necessários de aprofundamento e efetuada uma análise do conhecimento desenvolvido.

Uma adaptação a essa abordagem considera o fato de a resolução individual da TpF não, necessariamente, potenciar o desenvolvimento de um amplo e profundo Conhecimento Interpretativo (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2022). Assim, no Ciclo Pg-C-Pg, os professores são organizados em grupos (idealmente quatro participantes) para discutirem, refletirem e resolvem a TpF e os dois momentos posteriores seguem a mesma estrutura anterior. Esta opção associa-se também à necessidade de possibilitar que os professores possam experienciar o trabalho em grupo na primeira pessoa de modo que possam efetivar nas suas práticas o mesmo tipo de discussão com os seus alunos.

[6] Para alguns exemplos consultar Ribeiro, Alves e Gibim (2023) ou Ribeiro e Torrezan (2022).

Um exemplo de uma Tarefa para a Formação (Interpretativa) associada às inovações

As Tarefas para a Formação podem apresentar diferentes estruturas e aqui focamos a nossa atenção nas Tarefas Interpretativas (TI) que buscam desenvolver de forma mais específica o Conhecimento Interpretativo dos (futuros) professores. Este exemplo pretende ilustrar a conceitualização do recurso para a formação e instrumento para a coleta de informações de pesquisa, e para isso apresentamos uma TI no âmbito da rotação e, posteriormente, efetuamos uma discussão dos motivos que levam à inclusão das questões e produções dos alunos – considerando as três dimensões de inovação: teórica, de recursos, de implementação.

Figura 1 – Tarefa Interpretativa no âmbito da rotação

Parte Preliminar

1. Imagine que você está na rua e alguém lhe pergunta: Em um contexto matemático, o que é rotação? O que lhe responderia? (Não esquecer que estamos na rua e que, portanto, não pretendemos ensinar a essa pessoa).

2. O professor Mário pretende discutir com seus alunos do 7.º ano a definição matemática de rotação. Ele encontrou algumas definições e vai levá-las para discutir em uma formação da responsabilidade do CIEspMat, pois necessita de ajuda para saber qual ou quais é/são definição e qual(ais) será(ão) mais adequada(s) para discutir com seus alunos.
Ajude o professor Mário a escolher a(s) definição(ões) mais adequada(s) apresentadas abaixo e justifique por que são definições, ou não, indicando quais alterações teriam de ser efetuadas para que passem a ser.

Definições de rotação encontradas pelo professor Mário:

(A) Em uma rotação, toda figura é rotacionada em relação a um ponto denominado centro de rotação. As figuras original e rotacionada têm as mesmas medidas, e os elementos da figura original e rotacionada estão à mesma distância do centro de rotação.

(B) A simetria de rotação ocorre quando uma figura plana é girada em torno de um ponto, de acordo com um ângulo (com medida de abertura entre 0º e 360º), em certo sentido (horário ou anti-horário). Com isso, obtemos sempre uma figura plana que mantém a mesma forma e o mesmo tamanho da figura original.

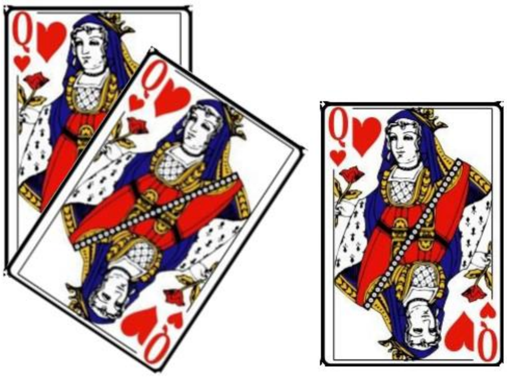
Parte I

Tarefa: Rotacionado cartas[7]

(Deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

Observe as Situações com cartas do baralho “dama”:

[7] Adaptado de Paques e Oliveira (2012).



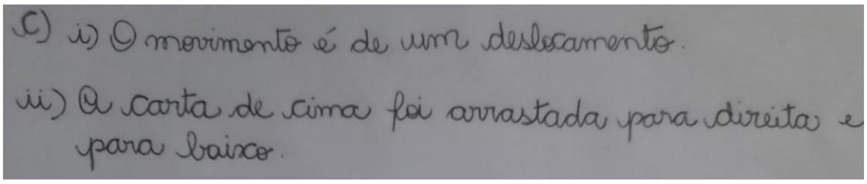
Situação 2

a) Registre o que chamou a atenção ao observar as cartas de cada uma das Situações.
b) Na Situação 1, consegue identificar qual o movimento efetuado para construir a carta toda a partir de uma de suas partes? Justifique.
c) Na Situação 2:
   i) Consegue identificar qual o movimento efetuado para obter a nova carta? Se sim, descreva-o. Se não, justifique.
   ii) Explique os procedimentos que se podem efetuar para obter a nova imagem.
d) Em cada situação, consegue identificar algum ponto que se mantém fixo, quando se efetua o movimento? Justifique.

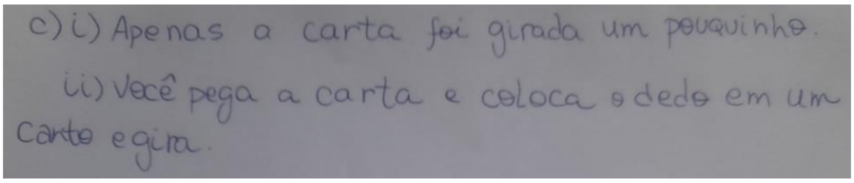
1. Considere a tarefa anterior:
   (i) Resolva a tarefa por si mesmo, sem pensar em um contexto de ensino.
   (ii) Quais considera que serão as maiores dificuldades matemáticas dos alunos para resolverem esta tarefa? Justifique a sua resposta.
   (iii) O que os alunos já têm de conhecer para realizar essa tarefa? Justifique a sua resposta.

Parte II

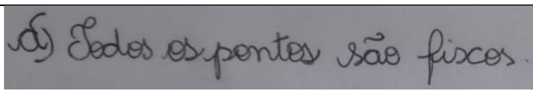
1. Após implementar essa tarefa com seus alunos do 7.º ano D, o professor Mário obteve algumas respostas e resolveu também levá-las para discutir na formação do CIEspMat. Veja as produções das alunas Aline e Camila referente às questões c) e d) da tarefa para o aluno:


c) i) O movimento é de um deslocamento.
ii) A carta de cima foi arrastada para direita e para baixo.

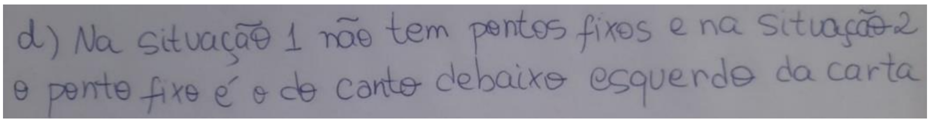
Produção de Aline para a questão c).


c) i) Apenas a carta foi girada um pouquinho.
ii) Você pega a carta e coloca o dedo em um canto e gira.

Produção de Camila para a questão c).



Produção de Aline para a questão d).



Produção de Camila para a questão d).

a) Para cada uma das produções, indique se as considera matematicamente corretas (adequadas) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado.
b) Para cada uma das alunas, forneça um *feedback* construtivo (mais do que dizer se está correto ou incorreto ao professor cumpre atribuir significado às resoluções das alunas de modo a, posteriormente, auxiliar no desenvolvimento do seu conhecimento matemático).

Fonte: Elaborado pelos autores

Na parte preliminar, incluem-se aqui duas questões direcionadas a aceder e desenvolver o conteúdo do KoT do professor. Na questão 1, tem-se por objetivo aceder (e desenvolver pelas discussões subsequentes) ao conhecimento do professor associado à fenomenologia do tópico rotação – situando a questão em um contexto "não educacional típico" tem por objetivo tirar o professor de um contexto de "explicar como faria em sala de aula", pois o intuito é aceder ao seu conhecimento matemático especializado e não as suas abordagens pedagógicas.

Já na questão 2, o foco é o conhecimento do professor associado ao que ele assume ser uma definição matemática (Zazkis; Leikin, 2008) – matematicamente válida – e que seja compreensível a seus alunos. Busca promover também uma reflexão crítica sobre as "pseudo definições" que se encontram em muitos materiais pedagógicos (aqui livros didáticos) e sobre a necessidade de um conhecimento que permita melhorar essas propostas pedagógicas para discussão em sala de aula, além disso por meio da discussão dessa questão, conhecer que há diferentes definições matemáticas para um mesmo ente matemático. Esta inclusão considera a necessidade de se levar em conta que os alunos apresentam dificuldades em interpretar e utilizar definições (Mariotti; Fischbein, 1997; Zazkis; Leikin, 2008), sendo essencial que o professor escolha definições didaticamente adequadas à faixa etária dos alunos e ao contexto de ensino, tendo como ponto de partida definições que contemplem o que os alunos já conhecem.

Na parte I, inclui-se, dentro de um retângulo, uma tarefa para alunos do 7.º ano (12 ou 13 anos) – de acordo com os documentos curriculares oficiais brasileiros (Brasil, 2018) e três questões para os professores. Essa tarefa para os alunos persegue o objetivo de aprendizagens matemáticas (parte das cinco dimensões): desenvolver o entendimento dos alunos sobre a transformação geométrica isométrica rotação, no que se refere a identificar seus elementos constituintes e procedimentos realizados para efetuar a rotação, a partir de imagens rotacionadas.

Convém ressaltar que as tarefas para os alunos sempre são formuladas considerando as maiores dificuldades identificadas em resultados de pesquisa. Apesar de, no âmbito da rotação, essas dificuldades se associarem, por exemplo, a identificar o centro de rotação, principalmente, quando ele não pertence à figura (Gaspar; Cabrita, 2014; Küchemann, 1981), nesta tarefa, por ser de introdução (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) e de assumir como ponto de partida algo que os professores conhecem – tarefa "típica de material didático" – tomou-se a opção de incluir exemplos cujos centros de rotação pertencem à figura, pois o objetivo não é dificultar a tarefa para o aluno, mas desenvolver o seu entendimento matemático e suas formas de Pensar matematicamente.

Nas questões para o professor, ao solicitar que resolvam a tarefa por si mesmos (questão (i)) pretende-se aceder ao conhecimento matemático no nível do conhecimento dos alunos (resolver a mesma tarefa que se espera que os alunos resolvam). Neste caso concreto, associa-se a identificar corretamente o movimento efetuado a)); os procedimentos realizados para obter a imagem por meio da rotação b) e c) - i)); diferenciar a rotação das demais transformações isométricas c) – ii)); procedimentos associados a rotação e os elementos constituintes que determinam essa transformação d)).

Ao solicitar que os professores identifiquem as maiores dificuldades matemáticas dos alunos para resolver esta tarefa (questão (ii)), pretende-se iniciar o movimento de levar os professores a instituírem o hábito mental de antecipar as possíveis respostas dos seus alunos considerando-as para o planejamento e implementação das discussões matemáticas. Essa antecipação está associada também ao foco que se pretende na parte II de modo a contribuir para identificar e atribuir significados aos erros dos alunos e as suas formas de pensar matematicamente. Com a questão (iii), visa-se aceder e desenvolver o conhecimento do professor relativo ao que os alunos conhecem (o que e como conhecem ou deveriam conhecer) que fundamentaria a realização da tarefa (questão 1 – iii)). Inclui-se, aqui, por exemplo, conhecer a noção de ângulo, associada à amplitude e ao sentido do ângulo de rotação e, a partir disso, discutir com os alunos os procedimentos a serem realizados para medir a amplitude de um ângulo, o que possivelmente, incluiria retomar e questionar os alunos o que conhecem a respeito do uso do transferidor, sempre numa perspectiva de indagações e não em "dar a regra". Ainda, se os alunos já conhecerem a reflexão central, o professor pode problematizar a equivalência entre reflexão central e a rotação de 180º (Bairral; Silva, 2010) considerando a Situação 1 da tarefa para o aluno.

Na parte II, foca-se o Conhecimento Interpretativo do professor. Com esse fito, nesta tarefa, incluem-se várias produções de alunos para a tarefa do aluno da parte I e solicita-se que o professor interprete e atribua significado às formas de pensar e proceder em matemática que sustentam essas produções fornecendo um *feedback* construtivo para cada aluna. As questões buscam aceder ao nível de Conhecimento Interpretativo e, pelas discussões posteriores, promover uma mudança de nível desse conhecimento. Associado à implementação da TI implementando o Ciclo Pg-C-Pg temos um documento breve que discute o que é e o que não é um *feedback* construtivo, pois o tipo e natureza desse *feedback* associa-se aos níveis de CI revelados pelos professores. Notemos que a forma como concebemos o papel e conhecimento do professor (Almeida; Ribeiro; Fiorentini, 2021) se relaciona com entendimento de como o próprio formador planeja e implementa as suas práticas formativas (Ferreira; Behrens; Teixeira, 2019), que podem ser generalistas ou direcionadas a desenvolver as especificidades do conhecimento do professor.

Nesta parte, as produções dos alunos que se incluem são de fundamental importância e a sua seleção (ou elaboração a partir de resultados de pesquisa) está associada as especificidades da intencionalidade formativa que se considera. Cada uma delas é incluída por se associar a uma discussão matemática específica e, simultaneamente, em conjunto, essas produções necessitam possibilitar uma mudança de nível de conhecimento que demanda desenvolver o entendimento do fenômeno da rotação. Estas produções das alunas, aqui focando os erros, associa-se a uma mudança de concepções relativas ao erro (Borasi, 1987) e sua utilização pedagógica como ponto de partida para o desenvolvimento de conhecimento dos alunos e o contexto associa-se ao desenvolvimento do hábito de desenvolver uma prática matemática interpretativa sustentada em atribuir significado aos motivos matemáticos que sustentam as produções dos alunos, sejam elas inadequadas ou contenham abordagens não esperadas[8] por forma que o professor repense sua própria formalização matemática e amplie o seu espaço solução (Ribeiro, 2024), – possa incorporar nesse espaço solução uma maior quantidade de elementos.

A produção de Aline para a questão c) foi incluída, pois apresenta uma resposta incompleta para o movimento efetuado, expressando a rotação apenas como um deslocamento

[8] Por exemplo, em Jakobsen, Ribeiro e Mellone (2014) apresentam-se e discutem-se algumas produções não esperadas (que não fazem parte do espaço solução usual dos professores) no âmbito dos racionais.

(em i)), sem especificar que esse deslocamento é em relação a um ângulo, sendo que o termo deslocamento pode ser utilizado para se referir também a translação; considera o movimento como duas translações (questão ii)), possibilitando discutir a diferença entre as transformações geométricas isométricas – para além dos nome –, como sejam, os procedimentos (algoritmos) envolvidos e o resultado obtido (imagem). Em d) não identifica que foi realizado um movimento para obter a carta toda a partir de uma de suas metades, o que possibilita trazer para a discussão a dificuldade relativa a visualizar a rotação já efetuada e a falta de entendimento de que as transformações geométricas isométricas se associam à ideia de um movimento rígido que mantém distâncias e amplitude de ângulos implicando que a figura original e a imagem pela transformação sejam congruentes.

A produção de Camila para a questão c) foi incluída, pois associa-se a um entendimento da rotação como uma volta, mas não especifica a amplitude nem o sentido do ângulo de rotação, sendo esses dois elementos fundamentais para o entendimento da rotação. Possibilita também uma discussão associada aos procedimentos para efetuar a rotação e a possibilidade de sua generalização – configurando-se, portanto, a existência de um algoritmo. Na questão d), a produção possibilita discutir a dificuldade e problemática em identificar o centro de rotação como o único ponto que se mantém fixo ao efetuar a rotação – em ambas as Situações pertence à figura –, mas sendo essencial uma discussão associada a como identificar o centro de rotação por meio da determinação das mediatrizes entre os pontos da figura original e seus correspondentes na imagem.

Ao solicitar que os professores forneçam um *feedback* construtivo (questão b)), pretende-se situar o professor no contexto de uma prática interpretativa, incitando-o a propor um *feedback* construtivo (Di Martino *et al*., 2017; Mellone *et al*., 2020), indo além de uma perspectiva meramente avaliativa (ver, por exemplo, Ribeiro, 2024). Isso requer que o professor efetivamente "escute" o Pensar matemático das alunas, o que vai muito além de uma leitura e descrição direta do que foi registrado (cópia) ou de uma "escuta sensorial", e exige uma escuta que, de fato, considere como ponto de partida o que e como os alunos revelam conhecer e, a partir dessa escuta ativa, propor orientações claras e objetivas que auxiliam os alunos a desenvolverem seu entendimento matemático.

Alguns comentários finais

Para inovar é necessário pensar e fazer distinto do que foi feito até então, e esse fazer diferente de formas inovadoras indicia outras possibilidades e caminhos que não tinham sido até então perspectivados, mas que se mostram possíveis e impactantes para os contextos e objetivos associados. No nosso contexto, essas formas e abordagens inovadoras revelam já resultados em pesquisas pontuais anteriores que buscam identificar o que ocorre em determinado momento – tirar as fotos de o que ocorre a cada instante (ver, por exemplo, Couto e Ribeiro, 2019; Ribeiro, Jakobsen e Mellone 2022) –, que indiciam um conjunto de possibilidades de "olhar cada frame" e entender o que leva a que o conhecimento seja desenvolvido e possibilitando que esses motivos e abordagens possam ser generalizadas a outros temas e tópicos.

As formas de entender o conhecimento do professor especificamente relacionado com a sua prática profissional e possibilitar que os alunos entendam matemática e desenvolvem as suas formas de pensar matematicamente (incluídas aqui em (i) inovações teóricas) é algo que quebra com um conjunto de práticas de pesquisa e de formação que assumem prioritariamente o conhecimento do professor no âmbito das generalidades (Shulman, 1987; Ribeiro, 2018) e focam a formação em questões do conhecimento pedagógico geral sem a necessária discussão do conhecimento matemático especificamente relacionado com a prática profissional do professor (Fiorentini; Crecci, 2017) que possibilitará mudar o foco e objetivos dessa prática para objetivos a médio e longo prazo.

Por outro lado, os recursos têm sido um foco de atenção em diversas pesquisas (e formação) em Educação Matemática (Grando, 2015), mas também aí o foco tem sido, com muita frequência no recurso por si e não nas discussões matemáticas que cada um desses recursos potencia ou impossibilita e os seus impactos nas discussões e aprendizagens matemáticas dos alunos. Ao considerarmos as próprias Tarefas para a Formação que são conceitualizadas a partir das maiores dificuldades matemáticas dos alunos e focando as especificidades do conhecimento do professor como um recurso para a própria formação e a pesquisa, almejamos que os resultados estejam direcionados as aprendizagens matemáticas e ao desenvolvimento do conhecimento especializado do professor. A TpF que se apresentou ilustrou essa perspectiva de (ii) inovação de recursos para a formação e coleta de informação. Inovação de recursos para a formação pois, apesar de se considerar uma tarefa para os alunos o objetivo da formação não é o "como implementar com os alunos em sala de aula", mas a discussão prioriza desenvolver o conhecimento matemático especializado que possibilitará discussões matemáticas de um nível superior daquelas que ocorreriam se esse conhecimento matemático se limitasse a um “saber fazer”. A multiplicidade de formas e possibilidades de como implementar a tarefa com os alunos (conhecimento pedagógico especializado) é algo que se aborda de forma transversal e assumindo uma perspectiva de que esse conhecimento pedagógico especializado “não se ensina, vive-se”, tal como não se ensina a Pensar, mas promovem-se formas de desenvolver esse pensamento.

De forma associada às discussões de vivenciar o conhecimento pedagógico encontram-se as abordagens para a coleta de informação que buscam contribuir para, de forma imbricada, desenvolver o conhecimento especializado de forma sustentada – associadas ao terceiro tipo de inovação (iii) das abordagem metodológica de implementação das Tarefas para a Formação e de conceitualização das Tarefas Formativas – correspondendo as abordagens metodológicas ICI e Pg-G-Pg. Aqui, pela etapa em que a pesquisa associada as Transformações Geométricas Isométricas e simetria se encontra[9] (exemplo da TpF apresentada), não trazemos exemplos do impacto destas abordagens metodológicas na riqueza das informações coletadas para aceder e discutir as especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado, mas deixamos algumas questões em aberto que podem ser foco de pesquisa que nos ajude a avançar no conhecimento que detemos sobre o tópico e o conhecimento e prática matemática do professor.

Assim, algumas questões emergentes e que podem abrir uma agenda de pesquisa com este foco especializado no conhecimento, tarefas e abordagens metodológicas são:

(i) Que Conhecimento Interpretativo revelam professores ao interpretarem e atribuírem significado a produções dos alunos?

(ii) Que níveis de Conhecimento Interpretativo podemos identificar ao longo de uma formação e como esses níveis se vão alterando ao longo do ano com relação as Tarefas para a Formação e discussões desenvolvidas?

(iii) Quais as características das Tarefas para a Formação que maximizam o desenvolvimento das especificidades do conhecimento do professor?

AGRADECIMENTOS: O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq “Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e

[9] Esta pesquisa entrou agora na etapa da coleta de informações em um contexto formativo desenhado associado a estes três tipos de inovação, pelo que em breve teremos resultados sobre a aplicabilidade e impacto das três dimensões para a pesquisa e para a formação.

suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. Mathematical Specialized Knowledge of a Mathematics Teacher Educator for Teaching Divisibility. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, v. 15, p. 187-210, 2021. Disponível em: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/15778. Acesso em: 10 ago. 2023.

BAIRRAL, M. A.; SILVA, M. A. **Instrumentação do Ensino da Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/255647628_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Special. Acesso em: 10 ago. 2024.

BAUMERT, J.; KUNTER, M.; BLUM, W.; BRUNNER, M; VOSS, T.; JORDAN, A.; KLUSMANN, U.; KRAUSS, S.; NEUBRAND, M.; TSAI, Y. Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. **American Educational Research Journal**, v. 47, n. 1, p. 133-180, 2010. Disponível em: https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/0002831209345157. Acesso em: 12 ago. 2024.

BIZA, I.; KAYALI, L.; MOUSTAPHA-CORRÊA, B.; NARDI, E.; THOMA, A. Afinando o Foco em Matemática: Desenho, Implementação e Avaliação de Atividades MathTASK para a Formação de Professores de Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-41, 3 ago. 2021. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13407. Acesso em: 10 ago. 2024.

BLACK, P.; WILIAM, D. Assessment and Classroom Learning. **Assessment in Education: Principles, Policy & Practice**, v. 5, n. 1, p. 7-74, 1998. Disponível em: https://www.gla.ac.uk/t4/learningandteaching/files/PGCTHE/BlackandWiliam1998.pdf. Acesso em: 17 ago. 2023.

BORASI, R. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. **For the Learning of Mathematics**, v. 7, n. 3, p. 2-8, 1987. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/Exploring-Mathematics-through-the-Analysis-of-Borasi/ecbdbeff03db2c2b54b735133a399d88cad3cbeb. Acesso em: 10 ago. 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

BREDA, A.; SERRAZINA, L.; MENEZES, L.; SOUSA, H.; OLIVEIRA, P. **Geometria e Medida no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2011.

CAMACHO, A. M. R.; GUERRERO, L. S. Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón. **Quadrante**, v. 28, n. 2, p. 100-124, 2019. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/23029. Acesso em: 10 ago. 2023.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L.C.; FLORES-MEDRANO, E; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ -CATALÃN, M.C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, **Research in Mathematics Education**, v. 20. n. 3, p. 236-253, 2018.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Learning and Teaching Early Math**: the learning trajectory approach. 3. ed. London: Routledge, 2020.

COUTO, S.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado de futuros professores da educação infantil e dos anos iniciais quanto às dificuldades de aprendizagem de alunos cegos e videntes sobre paralelismo. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 4, n. 3, p. 701-721, 2019. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/10544/7383. Acesso em: 10 ago. 2023.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational studies in mathematics**, v. 61, p. 293-319, 2006. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-2372-4. Acesso em: 10 ago. 2023.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M; MINICHINI, C.; RIBEIRO, M. Prospective teachers' interpretative knowledge: giving sense to subtraction algorithms. *In*: **Proceedings of Third ERME Topic Conference on Mathematics Teacher Education**. p. 66-75. 2017.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge. *In*: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer International Publishing, p. 424-428, 2020.

DUVAL, R. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 16, n. 3, p. 349-382, 1996. Disponível em: https://revue-rdm.com/1996/quel-cognitif-retenir-en/. Acesso em: 10 ago. 2023.

FERREIRA, J.L.; BEHRENS, M. A.; TEIXEIRA, A. M. Formação de professores para atuar no ensino superior, tecnológico e técnico. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 14, n. 1, p.123-137, jan./mar., 2019. Disponível em: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/11132. Acesso em: 10 ago. 2023.

FRANCIOLI, F. A. S.; SILVA, N. M. M. Pressupostos psicológicos e didáticos para a resolução de problemas matemáticos. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 16, n. 4, p. 2648-2662, out./dez. 2021. Disponível em: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/13612. Acesso em: 10 ago. 2023.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. **Zetetiké**, v. 25, p. 164-185, 2017. Disponível em:

https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647773. Acesso em: 10 ago. 2023.

FLORES-MEDRANO, E. Conocimiento de la practica matematica (KPM). *In*: CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; MONTES, M. (eds.). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. **Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva**. SGSE: Huelva, 2016.

GALLEGUILLOS, J.; RIBEIRO, M. Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. *In*: **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME, p. 1-8, 2019.

GASPAR, J. M. P.; CABRITA, I. GeoGebra e ferramentas tradicionais – Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias**. Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Braga: APM., 169-190. 2014.

GOMES, A. Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *In*: **Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: APM p. 233-243, 2012.

GRANDO, R. C. Recursos Didáticos na Educação Matemática: Jogos e Materiais Manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 5, n. 02, p. 393-416, 2015. Disponível em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/117. Acesso em: 10 ago. 2023.

GROSSMAN, P. Learning to practice: The design of clinical experience in teacher preparation. **Policy Brief**, p. 1-8, 2010.

HATTIE, J.; TIMPERLEY, H. The Power of Feedback. **Review of Educational Research**, v. 77, n. 1, p. 81-112, 2007. Disponível em: https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/003465430298487. Acesso em: 10 ago. 2023.

JAKOBSEN, A.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. A methodological approach to the development of prospective teachers' interpretative knowledge. *In*: **CERME12**. Italy: Bozen-Bolzano, 2022.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, p. 135-150, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/307558474_Norwegian_prospective_teachers'_MKT_when_interpreting_pupils'_productions_on_a_fraction_task. Acesso em: 10 ago. 2023.

JONES, K. Re-imagining geometry education in schools. *In*: SILLER, H.; WEIGEL, W.; WÖRLER, J. F. (org.). **Beiträge zum Mathematikunterricht 2020 auf der 54 Jahrestagung der Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik (GDM):** WTM-Verlag. [*S. l.: s. n.*], 2020. p. 31-38.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional. In: **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, p. 101-144, 1976.

KÜCHEMANN, D. Reflections and rotations. *In*: HART, K. (ed.). **Childrens understanding of mathematics**. London: John Murray, 1981.

LIMA, E. L. **Coordenadas no plano:** geometria analítica, vetores e transformações geométricas. 2 ed. Rio de Janeiro: GRAFTEX Comunicação Visual, 1992.

LIMA, E. L. **Isometrias**. SBM, 1996.

LIÑAN, M. M.; CONTRERAS, L. C.; BARRERA, V. Conocimiento de los Temas (KoT). *In:* CARRILLO, L.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. (ed.). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. **Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva**. Huelva: SGSE, 2016. p. 12-20.

LOPES, Q. V; TIROLI, L. G.; SANTOS, A. R. J.; FAVINHA, M. E. S. A praxis enquanto categoria fundante na constituição da formação de professores sob a perspectiva da pedagogia histórico-crítica. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 17, n. esp. 1, p. 967-980, mar. 2022.

MA, L. **Knowing and Teaching Elementary Mathematics**: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series). 1999.

MARIOTTI, M. A.; FISCHBEIN, E. Defining in Classroom Activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 219-248, 1997.

MARTÍN, M. I. P.; RODRÍGUEZ, N. C.; VALCARCE, M.C; DÍAZ, J. P. M.; GONZÁLEZ, L. C. C. Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado. Continuación de la antigua Revista de Escuelas Normales**, v. 98, n. 37.2, 2023.

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. St Albans: Tarquin, 2006.

MELLONE, M.; JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; PARLATI, A. Ethical dimension in the use of interpretative tasks in mathematics teacher education: division of fractions. *In*: **CERME 13**. Budapest, Hungary, 2023.

MELLONE, M.; RIBEIRO, M; JAKOBSEN, A.; CAROTENUTO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 154-167, 2020.

MELLONE, M.; TORTORA, R.; JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M. Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. *In*: **CERME 10**. Dublin, Ireland, 2017.

MITCHELL, R. N.; MARIN, K. A. Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 18, p. 551-575, 2015.

MONTES, M.A; CLIMENT, N. Conocimiento de la estructura matematica (KSM). In: CARRILLO, L.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. (ed.). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. **Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.** Huelva: SGSE, 2016. P. 21-29.

MOYER, J. C. The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 9, n. 2, p. 83-93, 1978.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

PACELLI, T.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M; JAKOBSEN, A. Collective discussions for the development of interpretative knowledge in mathematics teacher education. *In*: BORKO, H; PORTARI, D (ed.). **Proceedings of The Twenty-Fifth ICMI Study, Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups**. Lisbon: University of Lisbon, 2020. p. 388-395.

PAQUES, O. T. W., OLIVEIRA, S. R. Oferenda musical de Bach. **Série Matemática na Escola**. Guia do professor, versão para tela, p. 9. 2012. Disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1143. Acesso em: 10 dez. 2023.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência. 1975.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

RADFORD, L. Mathematics teaching and learning as an ethical event. **La matematica e la sua didattica**, v. 29, n. 2, p. 185-198, 2021.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. da. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 28, p. e020027, 2020.

RIBEIRO, C. M. Del cero hasta más allá del infinito – algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro "también" a largo plazo. *In*: BERCIANO, A; GUTIÉRREZ, G; ESTEPA, A; CLIMENT, N (ed.). **Investigación en Educación Matemática XVII**. Bilbao: SEIEM, 2013. p. 71-85.

RIBEIRO, M. Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração. **Debates em Educação**, v. 16, n. 38, e16020, 2024.

RIBEIRO, M. Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática: metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo. *In*: **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. Biblioteca do Educador. Brasil: SBEM, 2018. v. 13, p. 167-185.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. **Atribuir significado aos sentidos e ao algoritmo da multiplicação para a melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas**. Coleção CIEspMat – Formação. Campinas: Cognoscere, 2022. v. 6.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIBEIRO, M.; ALVES, C.; GIBIM, G. **Entendendo as propriedades da multiplicação e a estrutura matem tica associada   tabuada como contexto para desenvolver o Pensamento Alg brico**. Coleção CIEspMat – Formação. Campinas: Cognoscere, 2023. v. 11.

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 15, p. 277-310, 2012.

RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; MELLONE, M. El Conocimiento Interpretativo en el contexto de la medición *In*: **Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (mtsk)**: 10 años de camino. 1. ed. Madrid: Editorial DYKINSON, S.L., 2022. v. 1, p. 277-290.

RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 37., 2013. **Proceedings […]**. Kiel: PME, 2013. p. 89-96.

RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students' non standardreasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, n. 36, v. 2, p.8-13, 2016.

RIBEIRO, M., TORREZAN, E. **Conhecimento e prática matemática do professor para entender a medida de uma distância**. Coleção CIEspMat – Formação. Campinas: Cognoscere, 2022. v. 9.

ROWLAND, T; TURNER, F; THWAITES, A; HUCKSTEP, P. **Developing primary mathematics teaching**: Reflecting on practice with the knowledge quartet. London: SAGE, 2009.

SANTOS, L.; PINTO, L. Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FPR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33., 2009, Thessaloníki. **Proceedings […]**. Thessaloníki, Greece: PME, 2009. p. 49-56.

SCHOENFELD, A. H. Models of the Teaching Process. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, n. 3, p. 243-261, 2000.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, C.; RIBEIRO, M. Discutindo uma Tarefa para a Formação como recurso para desenvolver o Conhecimento Interpretativo do professor no âmbito da rotação. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 33., Barcelos. **Atas do [...]**. Barcelos: APM., 2023.

SMITH, M. S. **Practice-based professional development for teachers of mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.; HENNINGSEN, M.; SILVER, E. A. **Implementing standards-based mathematics instruction**: a Casebook for Professional Development. New York: Teachers College Press, 2000.

WASSERMAN, N. H.; FUKAWA-CONNELLY, T.; WEBER, K.; MEJ A, J. P.; ABBOTT, S. **Understanding analysis and its connections to Secondary mathematics Teaching**. [*S. l.*]: Springer Nature, 2022.

WATSON, A.; SULLIVAN, P. Teachers learning about tasks and lessons. *In*: TIROSH, D; WOOD, T (ed.). **Tools and processes in mathematics teacher education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 109-135.

ZASLAVSKY, O.; LEIKIN, R. Professional development of mathematics teacher educators: Growth through practice**. Journal of mathematics teacher education**, v. 7, p. 5-32, 2004.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of a square. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, p. 131-148, 2008.

Reconhecimentos: O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).
Financiamento: CNPQ: (projeto número 404959/2021-0).
Conflitos de interesse: Não aplicável.
Aprovação ética: Essa pesquisa teve aprovação no Comitê de Ética e Pesquisa de CAAE: 60427622.6.0000.8142.
Disponibilidade de dados e material: Não aplicável.
Contribuições dos autores: Os autores contribuíram igualmente na elaboração do artigo.

Processamento e editoração: Editora Ibero-Americana de Educação.
Revisão, formatação, normalização e tradução.