ESPECIFICIDADES DE LOS CONOCIMIENTOS INTERPRETATIVOS Y LAS TAREAS FORMATIVAS DEL DOCENTE COMO ELEMENTOS PARA PRÁCTICAS CREATIVAS Y MATEMÁTICAMENTE INNOVADORAS

ESPECIFICIDADES DO CONHECIMENTO INTERPRETATIVO DO PROFESSOR E DAS TAREFAS PARA A FORMAÇÃO COMO ELEMENTOS PARA PRÁTICAS CRIATIVAS E MATEMATICAMENTE INOVADORAS

SPECIFICITIES OF TEACHER'S INTERPRETATIVE KNOWLEDGE AND TASKS FOR TEACHER EDUCATION AS ELEMENTS FOR CREATIVE AND INNOVATIVE MATHEMATICAL PRACTICES

Miguel RIBEIRO[1]
e-mail: cmribas78@gmail.com

Caroline SILVA[2]
e-mail: caroldesouza86@gmail.com

Cómo hacer referencia a este artículo:

RIBEIRO, M.; SILVA, C. Especificidades de los conocimientos interpretativos y las tareas formativas del docente como elementos para prácticas creativas y matemáticamente innovadoras. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 19, n. esp. 2, e024073, 2024. e-ISSN: 1982-5587. DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553

| **Enviado en**: 06/10/2023
| **Revisiones requeridas en**: 24/01/2024
| **Aprobado el**: 11/03/2024
| **Publicado el**: 20/07/2024

Editor: Prof. Dr. José Luís Bizelli
Editor Adjunto Ejecutivo: Prof. Dr. José Anderson Santos Cruz

[1] Universidad Estatal de Campinas (UNICAMP), Campinas – SP – Brasil. Professor. Doutorado em Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimental (UHU/España).
[2] Universidad Estatal de Campinas (UNICAMP), Campinas – SP – Brasil. Doctoranda en el Programa de Posgrado Multiunidad en Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (PECIM/UNICAMP).

RESUMEN: En el contexto de la formación docente con un enfoque en las especificidades del conocimiento especializado del docente, se evidencia la necesidad de una formación innovadora y científicamente sustentada para desarrollar investigaciones con enfoques replicables que se centren en las dimensiones fundamentales para mejorar la calidad de las discusiones y el aprendizaje matemático de los estudiantes. Considerando las especificidades de la práctica profesional docente que posibilitan la comprensión de los estudiantes, a partir de los conocimientos que poseen, se requiere un conocimiento especializado que permita escuchar el pensamiento matemático de los estudiantes – llamado Conocimiento Interpretativo – y este conocimiento no se desarrolla en la práctica del aula, requiriendo contextos formativos con este propósito. En este artículo, discutimos la innovación asociada a los enfoques teóricos y metodológicos de la investigación, la conceptualización de las Tareas para la Formación Especializada (en el ámbito de las Transformaciones Geométricas Isométricas) y el enfoque metodológico asociado a su implementación en contextos que entrelazan la formación y la investigación.

PALABRAS CLAVE: Conocimientos interpretativos. Tareas para la formación. Transformaciones geométricas isométricas.

RESUMO*: No contexto da formação de professores com foco nas especificidades do conhecimento especializado do professor, é evidente a necessidade de uma formação inovadora e, cientificamente, sustentada para desenvolver pesquisas com abordagens replicáveis que foquem as dimensões fundamentais para melhorar a qualidade das discussões e das aprendizagens matemáticas dos alunos. Considerando as especificidades da prática profissional do professor que possibilitam o entendimento dos alunos, a partir do conhecimento que possuem, é requerido um conhecimento especializado que permita escutar o Pensar matemático dos alunos – denominado Conhecimento Interpretativo – e esse conhecimento não se desenvolve na prática de sala de aula, requerendo contextos formativos com esse fito. Neste artigo, discutimos inovação associada às abordagens teóricas e metodológicas de pesquisa, à conceitualização das Tarefas para a Formação especializada (no âmbito das Transformações Geométricas Isométricas) e à abordagem metodológica associada à sua implementação em contextos imbricando formação e pesquisa.*

PALAVRAS-CHAVE*: Conhecimento Interpretativo. Tarefas para a Formação. Transformações Geométricas Isométricas.*

ABSTRACT*: In the context of teacher education focusing on the specificities of teachers' specialized knowledge, it's evident the need for innovative and scientifically supported proposals for research with replicable approaches focusing on the foundational dimensions to improve the quality of discussions and students' mathematical learning. Considering the specificities of teacher's practices that enable students to understand, in order to be able to assume has a starting point the students' knowledge, a specialized knowledge that allows listening to students' mathematical thinking is required – called Interpretive Knowledge. This specialized knowledge is not developed during practice, requiring teacher education contexts with such a purpose. In this paper, we discuss innovation associated with theoretical and methodological research approaches, the conceptualization of Tasks for Teacher Education (within the scope of Isometric Geometric Transformations) and the methodological approach associated with its implementation in contexts intertwining teacher education and research.*

KEYWORDS*: Interpretive Knowledge. Tasks for Teacher Education. Isometric Geometric Transformations.*

Introducción

Pensar y hacer innovación, en términos de resultados o procesos, tiene que estar asociado con hacer algo que aún no se ha hecho, hacerlo de manera diferente a lo habitual, o ambas cosas. En el contexto de la Educación Matemática, que busca mejorar los resultados de los estudiantes en matemáticas, la innovación no puede ser entendida como cambiar los enfoques pedagógicos y continuar en el mismo espacio de discusión matemática, sino que exige considerar como prioridad cambiar las formas de pensar y desarrollar el conocimiento matemático de los estudiantes. Esta innovación requiere de una práctica profesional especializada y matemáticamente innovadora.

La práctica del profesor de matemáticas se basa en tareas, preparándolas e implementándolas con los alumnos (Mason; Johnston-Wilder, 2006). Sin embargo, cada tipo de tarea (Ponte, 2005) está asociada a objetivos diferentes y a una determinada forma de entender el papel del profesor y de los alumnos (Stein *et al*., 2000; Watson; Sullivan, 2008). Entre la diversidad de tipos y formas de tareas – introducción, consolidación, revisión, evaluación, ejercicios involucrados, resolución de problemas, formulación de problemas o investigaciones – nuestra priorización para pensar e innovar se dirige a tareas de introducción de temas – porque son los momentos en los que el profesor moviliza su conocimiento de una manera más accesible (Ribeiro, 2013; Arroyo; Carrillo; Monteiro, 2012; Shoenfeld, 2000) – y se asocian con la resolución y formulación de problemas (o investigaciones) porque son los contextos que llevan a los estudiantes a tener que pensar matemáticamente de una manera que nunca se ha hecho antes, o no serían problemas reales.

También se plantea un paralelismo entre la práctica del profesor con los alumnos y la práctica formativa del formador, tanto en términos metodológicos de permitir al profesor experimentar lo que se espera que sea capaz de proporcionar posteriormente a sus alumnos (asumimos que el conocimiento pedagógico no se enseña, se experimenta) como en términos matemáticos, porque el profesor tiene que empezar a entender las matemáticas y a pensar matemáticamente para que sea posible. Posteriormente, proponer tareas y realizar discusiones que permitan el desarrollo de las formas de pensar matemáticamente de los estudiantes, y esto requiere hacer las cosas de manera diferente a lo que se ha hecho, o no sería necesario enfocarse en la formación. Con el fin de desarrollar una formación especializada de profesores especializados, consideramos las denominadas Tareas de Formación – TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) como recurso pedagógico especializado y especializado, en vista de la forma en que asumimos nuestro rol como docentes, el rol de estudiantes y el rol de formadores. Cada

TpF va acompañada de un conjunto de otros tres documentos (que, en conjunto, constituyen las Tareas Formativas) que sustentan y apoyan la formación especializada que persigue los objetivos de desarrollar el conocimiento especializado del profesor y la transformación de sus prácticas matemáticas en algo pedagógicamente apasionante y matemáticamente innovador, que permita a los estudiantes disfrutar del aprendizaje. Porque entienden lo que hacen y por qué lo hacen, en cada momento y con conexiones futuras. Este enfoque prioritario de la formación en el conocimiento especializado del docente considera que este conocimiento es, entre los factores controlables, el que más impacta en el aprendizaje y los resultados de los estudiantes (Baumert *et al*., 2010; Grossman, 2010; Nye; Konstantopoulos; Hedges, 2004).

Entre la panoplia de formas de considerar el conocimiento del docente, desde una perspectiva que se centra en las generalidades (Ribeiro, 2018) hasta una que concibe las especificidades, asumimos esta última. En este sentido, se busca romper con varios de los supuestos instituidos e implementados aún hoy en día en la formación docente – generalidades, como que basta con haber sido alumno de la etapa educativa que se va a impartir y replicar la experiencia para poder enseñar (ausencia de discusión en la formación inicial sobre los temas que se tendrán que enseñar); que basta con saber hacerlo (formación de futuros docentes y futuros matemáticos comunes) y con carácter instrumental (Lopes *et al*., 2022); que para mejorar los resultados, basta con cambiar las metodologías por las más "atractivas" (formación centrada en metodologías "de moda" sin discusión matemática) – y asumimos el conocimiento del docente como especializado desde la perspectiva de las conceptualizaciones teóricas de la *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[3] – MTSK (Carrillo *et al*., 2018) y Consulta Interpretativa – CI (Di Martino; Mellone; Ribeiro, 2020; Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014; Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013).

Asumimos, de manera asociada, una perspectiva de innovación también en términos metodológicos de implementación de TpF en contextos formativos y para la investigación, asumida de manera entrelazada. Se consideran enfoques metodológicos para la implementación de la TpF los ciclos formativos Individual-Colectivo-Individual – ICI (Pacelli *et al*., 2020) o Grupo Pequeño-Colectivo-Grupo Pequeño – Pg-C-Pg (Jakobsen; Arroyo; Mellone, 2022; Mellone *et al*., 2023), como un proceso que permite realizar la innovación en términos de resultados centrándose en diferentes tipos de discusiones individuales-colectivas.

[3] Elegimos usar la nomenclatura en inglés porque ya es reconocida internacionalmente y la traducción puede llevar a una significación errónea, que se asocia con cada una de las dimensiones de la conceptualización.

En este texto, realizamos una discusión teórica a partir de ejemplos de propuestas de investigación y formación, ambas especializadas, no discutiendo el enfoque metodológico de la investigación que hemos desarrollado, sino centrando aquí la atención en las dimensiones de la innovación educativa que se consideran. Discutimos la innovación en tres dimensiones: (i) teórica (formas de entender el conocimiento del docente); (ii) recursos para la recopilación de información (Tareas de Formación) y el desarrollo de los conocimientos especializados del profesor (Tareas de Formación y Tareas de Interpretación); y (iii) enfoque metodológico para la implementación de las Tareas de Capacitación y la conceptualización de las Tareas de Capacitación para maximizar la calidad de las discusiones y la sostenibilidad del desarrollo del conocimiento especializado del docente. Para esta discusión, traemos un ejemplo de una Tarea Formativa y el TpF asociado con la transformación isométrica de rotación. Este ejemplo sirve como una entidad que genera discusión y promueve la comprensión, pues la experiencia demuestra que toda innovación requiere romper con las cadenas que nos restringen (Ribeiro, 2013) y hacer lo que aún no se ha hecho y, al presentar ejemplos concretos que nos permitan sostener las discusiones, se espera que pueda llevar al lector a, a partir de esta especificación, para llegar a una generalización de las ideas presentadas.

Algunas discusiones teóricas

Los estudiantes tienen dificultades con varios temas matemáticos (Clements; Sarama, 2020; Kieren, 1976; Ma, 1999) y, de manera más general, dificultades para pensar y pensar matemáticamente. Entre los temas en los que revelan mayores dificultades se encuentra la Geometría y, dentro de esta, las transformaciones geométricas isométricas asumen un lugar destacado, no solo por las dificultades (véase, por ejemplo, Bairral; Silva, 2010; Gaspar; Cabrita, 2014; Küchemann, 1981), sino por las conexiones que pueden (y deben) establecerse con otros temas y tópicos matemáticos y extramatemáticos, con el fin de potenciar el desarrollo de este Pensamiento Matemático en términos de comprensión de la estructura matemática y de los elementos que sustentan la demostración y la generalización.

La rotación es una de las tres transformaciones geométricas isométricas (las otras son la reflexión y la traslación) y, al ser isométrica, conserva las distancias (Lima, 1992) y la amplitud angular, lo que conduce a la congruencia entre la figura original y la imagen transformada. Entre las transformaciones isométricas, se considera la más difícil de entender para los estudiantes (Gomes, 2012; Moyer, 1978), especialmente cuando el centro de rotación es externo a la figura (Gaspar; Cabrita, 2014; Küchemann, 1981); sin embargo, su comprensión es esencial para el desarrollo del pensamiento geométrico, incluyendo la imaginación intuitiva (Jones, 2020), la percepción visual y el razonamiento espacial (Gomes, 2012), lo que contribuye a que los estudiantes interpreten el mundo que los rodea.

Cuando pensamos en las formas en que los estudiantes aprenden, entendemos que estos aprendizajes ocurren asociados a tareas para los estudiantes, que pueden ser entendidas de diferentes maneras, de acuerdo con los diferentes tipos de tareas (Ponte, 2005): abiertas, cerradas, problemas, investigaciones. En relación con los problemas (y las investigaciones, como problemas más amplios), podemos considerar un marco de cuatro pasos para su resolución (Polya, 1975). Es fundamental que este tipo de tareas y pasos de resolución de problemas sean discutidos en la formación docente para que puedan convertirse en algo natural en las prácticas docentes y, aún hoy, casi 50 años después de los estudios de Polya, esta idea de práctica sostenida de resolución de problemas puede entenderse como una innovación. incluso ante las dificultades de los estudiantes para resolver problemas en diferentes temas matemáticos (Francioli; Silva, 2021).

Mientras que la práctica matemática del profesor se basa en la implementación y discusión de tareas matemáticas (véase, por ejemplo, Mason y Johnston-Wilder, 2006; Ribeiro, Mellone y Jakobsen, 2016) y la necesidad de que los docentes tengan el mismo tipo de experiencias que se espera que puedan brindar a sus estudiantes, es fundamental que la formación docente se desarrolle en el mismo espacio de prácticas que se espera implementar con los estudiantes (Ribeiro; Carrillo; Monteiro, 2012) y, por lo tanto, que se apoye en la preparación, implementación y discusión de tareas que contribuyan al desarrollo de las especificidades del conocimiento del docente para su práctica profesional. Por lo tanto, es fundamental que la formación del profesorado permita crear puentes que reduzcan la distancia entre las matemáticas que los profesores han aprendido y las matemáticas que se espera que sean capaces de enseñar a sus alumnos (Zaslavsky; Leikin, 2004). Estas tareas y las oportunidades asociadas deben considerar un enfoque en los procesos matemáticos (Biza *et al*., 2015) para permitir que los docentes transformen sus conocimientos matemáticos en prácticas matemáticas orientadas pedagógicamente (Wasserman *et al*., 2022).

En este sentido, es fundamental contar con un conjunto de enfoques innovadores que consideren un enfoque en los temas de gestión matemática en el aula, posibilitando discusiones en un contexto formativo para acercarse a un escenario auténtico de enseñanza y aprendizaje esperado, persiguiendo el objetivo de asegurar que se priorice el aprendizaje matemático de los estudiantes y no el contenido matemático en sí (Mitchell; Marín, 2015) o cuestiones pedagógicas generales no relacionadas con el aprendizaje (Ribeiro, 2018). Teniendo en cuenta la centralidad de las tareas en el aprendizaje matemático de los estudiantes, la formación docente también debe asumir esta centralidad y considerar las especificidades de la "práctica profesional" de cada uno de los involucrados (estudiantes y profesores) y las especificidades del conocimiento profesional del profesor para esta práctica matemática de capacitar a los estudiantes para comprender las matemáticas.

Estas especificidades de la práctica docente han sido entendidas desde una perspectiva que asume la centralidad del conocimiento pedagógico general – sin ninguna referencia a los contenidos abordados (ver Shulman, 1986, 1987) – y que puede entenderse como una forma de diferenciar el "grupo docente" de todos los demás "grupos profesionales", pero permanecer en estas generalidades hace poco o nada para pensar en las especificidades de la práctica del profesor de matemáticas en relación con otros profesores de matemáticas. otras áreas de conocimiento (Ribeiro, 2018). Para dirigir la atención a estas especificidades, es esencial considerar qué hace que la práctica profesional de los profesores de matemáticas sea única. Esta singularidad está asociada a sus conocimientos profesionales para la enseñanza de las matemáticas y al hecho de que estos conocimientos se consideran únicos y específicos de este desempeño profesional – algunas de las perspectivas teóricas que asumen esta idea son, por ejemplo, la *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008), o *Knowledge Quartet* – KQ (Rowland *et al*., 2009), el *Mathematics for Teaching* – MfT (Davis; Simmt, 2006), o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo *et al*., 2018) y Conocimiento Interpretativo – IC (Jakobsen; Arroyo; Mellone, 2014). En el ámbito de este trabajo, asumimos las conceptualizaciones *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* y el Conocimiento Interpretativo, que se basan en el principio de que el conocimiento del profesor está especializado en el dominio matemático y pedagógico.

El MTSK es una conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas y permite (busca) caracterizar en detalle las especificidades del contenido de este conocimiento considerando dos dominios: *Mathematical Knowledge* (MK) y *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Discutiremos aquí solo el contenido de MK[4], que se subdivide en tres subdominios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM)

[4] Para más información sobre el contenido del PCK en esta conceptualización, véase, por ejemplo, Ribeiro y Almeida (2022) y Ribeiro, Alves y Gibim (2023) quienes también ilustran una perspectiva innovadora en cuanto a la forma y el enfoque de la discusión del diálogo de investigación y las propuestas para los docentes.

y *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Para dar ejemplos del contenido de estos conocimientos, optamos por centrarnos en la rotación, ya que es un tema problemático en aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje (véase, por ejemplo, Gaspar y Cabrita, 2014 o Küchemann, 1981).

El KoT corresponde a los conocimientos matemáticos del docente relacionados con los temas matemáticos a enseñar, incluyendo los conocimientos procedimentales y conceptuales, así como las proposiciones, ejemplos, conexiones intraconceptuales, fórmulas y algoritmos, en consecuencia, de sus demostraciones y los significados que se asocian al conocimiento de la fenomenología de cada tema (Liñan; Contreras; Barrera, 2016). Se consideran cuatro categorías de conocimientos: (i) procedimientos; (ii) definiciones, propiedades y fundamentos; (iii) registros de representación; (iv) fenomenología y aplicaciones.

(i) procedimientos, se refieren al conjunto de acciones secuenciales que se llevan a cabo para obtener una respuesta a un problema determinado, que puede ser a través de algoritmos (convencionales o alternativos) o utilizando otras estrategias. En el contexto de la rotación, por ejemplo, se relaciona con saber que, para identificar el centro de rotación de una figura ya transformada, es necesario trazar la mediadora entre un punto de la figura original y su contraparte en la imagen, repitiendo este procedimiento (al menos) dos veces, para obtener el punto de intersección de las mediadoras trazadas, que corresponde al centro de rotación.

(ii) las definiciones contemplan el conocimiento sobre el conjunto mínimo de propiedades del tema que permiten identificarlo de manera unívoca (Liñan; Contreras; Barrera, 2016). Implica saber que una posible definición de rotación es:

> Sea O un punto tomado en el plano Π y un ángulo de vértice$\alpha = A\hat{O}B$ O. *Ángulo de rotación* alrededor del puntoα O es la función $\rho_{O,\alpha}: \Pi \to \Pi$ Se define de la siguiente manera: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ y, para cada punto $X \neq O$ en Π, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ es el punto del plano Π tal que
> $$d(X,O) = d(X',O), X\hat{O}X' = \alpha$$
> y el "sentido de rotación" de A hasta B es el mismo que el de X a X' (Lima, 1996, p. 21-22, nuestra traducción).

Al considerar las (ii) propiedades, se asume que el conocimiento del profesor está asociado con el conocimiento del conjunto de todos los atributos matemáticos que son comunes al tema. Incluye saber que la composición de dos rotaciones del mismo centro de rotación es conmutativa, al igual que la composición de dos rotaciones de diferentes centros no es conmutativa (Breda *et al*., 2011).

(ii) los fundamentos se relacionan con el conocimiento sobre el conjunto de atributos matemáticos que "sustentan" el tema y conectan conceptos (Camacho; Guerrero, 2019). En cuanto a la rotación, se refiere a saber que sus cimientos son la figura original, el centro y el ángulo de rotación (amplitud y dirección).

En (iii) los registros de representación incluyen conocer las diferentes formas de representar un tema, concepto, proceso o procedimiento (Liñan; Contreras; Barrera, 2016), que puede ser aritmética, concreta, gráfica, pictórica, que involucra lenguaje verbal o simbólico (Duval, 1996). Implica saber que la rotación de un triángulo con vértices X, Y y Z con centro de rotación en O desde un ángulo de 60° en sentido contrario a las agujas del reloj se puede representar algebraicamente mediante $R_o\ [(X,Y,Z),90°]$.

(iv) la fenomenología y sus aplicaciones se relaciona con el conocimiento de los conceptos asociados a un tema determinado y los diferentes fenómenos que lo involucran, así como el significado de cada una de las posibles manifestaciones e interpretaciones de estos fenómenos, según los diferentes contextos en los que se enseñan (Liñan; Contreras; Barrera, 2016). Como ejemplo de conocimiento relacionado con la fenomenología de la rotación, la rotación es una transformación geométrica isométrica en la que se lleva a cabo una transformación (fenómeno) en la figura.

El subdominio KSM se refiere al conocimiento de las diferentes conexiones entre temas matemáticos (Carrillo *et al*., 2018), considerando los aspectos temporales de la secuenciación matemática: (i) conexiones de complejización y (ii) conexiones de simplificación; y los aspectos de cada tema: (iii) conexiones transversales y (iv) conexiones auxiliares (Montes; Climent, 2016).

Las conexiones (i) de la complejización involucran el conocimiento que permite al docente establecer relaciones con otros temas matemáticos más avanzados de lo que requiere el contexto escolar. En el contexto de la rotación, se refiere a conocer la conexión de complejización entre la rotación y el círculo trigonométrico, ya que, al rotar el triángulo rectángulo en el círculo trigonométrico, es posible reducir las relaciones trigonométricas del 3er cuadrante al 1er cuadrante.

(ii) las conexiones de simplificación se refieren al conocimiento que permite al docente incluir en la discusión un tema o concepto que es más simple que lo requerido por el contexto escolar. Implica conocer la conexión entre rotación y ángulo, en el que rotar una figura desde un ángulo de 90° equivale a una rotación de $\frac{1}{4}$ De vuelta a la imagen.

DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553

En cuanto a (iii) las conexiones transversales, estas se relacionan con el conocimiento de la naturaleza de algunos conceptos, que emergen al abordar diferentes conceptos a lo largo de la matemática escolar. Como ejemplo de conexión transversal entre rotación y simetría, la imagen obtenida después de la transformación es simétrica, ya que la simetría es un concepto transversal a las transformaciones geométricas isométricas.

En cuanto a (iv) conexiones auxiliares, se refieren a conexiones matemáticas que involucran diferentes temas, que no son el foco de la discusión, agregando un elemento para contribuir y sustentar la discusión matemática. A modo de ejemplo, la conexión auxiliar entre la rotación y la ubicación de los puntos implica saber que, para realizar la rotación, es necesario identificar el centro de rotación, que es un punto que se puede ubicar en el plano cartesiano.

El KPM se refiere al conocimiento de la práctica de producir matemáticas, su funcionamiento y no cómo enseñarlas, involucrando la clasificación y planificación, las formas de validación y demostración, el papel de los símbolos, el lenguaje formal y las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (Carrillo *et al*., 2018). Incluye el conocimiento del uso y funcionamiento de ejemplos y contraejemplos (Flores-Medrano, 2016) y de cómo demostrar, justificar, hacer deducciones e inducciones (Carrillo *et al*., 2018). En el contexto de la rotación, se refiere a saber que un contraejemplo de rotación es la reflexión axial, porque la reflexión axial se realiza con respecto a una línea llamada eje de reflexión y no según un ángulo. Por lo tanto, los procedimientos utilizados para realizar la reflexión son diferentes de los procedimientos utilizados para realizar la rotación.

Este conocimiento matemático sustenta la práctica profesional del profesor de matemáticas que busca capacitar a los estudiantes para comprender qué hacen y por qué lo hacen en cada momento y, en la perspectiva que asumimos, esto requiere considerar como punto de partida qué y cómo saben los estudiantes sobre cada uno de los temas matemáticos que tienen el derecho y el deber de conocer y comprender. El conocimiento matemático especializado para esta práctica interpretativa se denomina Conocimiento Interpretativo – IC (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013; Di Martino; Mellone; Ribeiro, 2020; Mellone et *al*., 2020).

La importancia de asumir como punto de partida qué y cómo saben los estudiantes como premisa del CI es esencial para una discusión ética efectiva en el aula (Mellone *et al*., 2023), lo cual es uno de los retos en el ámbito de la Educación Matemática (Radford, 2021), e implica asociar las discusiones matemáticas con oportunidades de inclusión, compromiso y respeto, desde la misma perspectiva de la ética comunitaria (Radford, 2021), por un enfoque pedagógico dirigido a la comprensión de las matemáticas.

De acuerdo con la Enciclopedia Springer Nature, Conocimiento Interpretativo:

> Se refiere al conocimiento matemático amplio y profundo que permite a los docentes apoyar a los estudiantes en el desarrollo de sus propios conocimientos matemáticos basados en sus propios razonamientos y producciones, independientemente de si son no estándar o incorrectos. El CI complementa el conocimiento de los estudiantes de los errores o estrategias típicas con el conocimiento de los posibles orígenes de los errores típicos y atípicos y el conocimiento del uso de los errores como fuente efectiva de aprendizaje (Di Martino; Mellone; Ribeiro, 2020, p. 426, nuestra traducción).

El CI permite al docente comprender las matemáticas que sustentan el razonamiento y las formas de pensar de los estudiantes presentes en sus producciones, con el fin de explorar los errores, entendidos como oportunidades de aprendizaje (Borasi, 1987) y realizar orientaciones a partir del significado asignado. En este conocimiento, que sustenta la práctica matemática interpretativa, se consideran dos nociones centrales: espacio, solución y *feedback*.

El espacio de solución se refiere al conjunto de múltiples formas y representaciones que cada individuo concibe cuando se le pide que resuelva un problema, incluso si ese problema tiene una única solución (Jakobsen; Arroyo; Mellone, 2014). Es fundamental que el profesor conozca varias formas de proceder para resolver un problema para que, ante la producción de un alumno diferente a la suya, no tenga dificultades para interpretarla y no la considere incorrecta por el hecho de ser diferente a la suya, por lo que es necesario que tengamos un espacio de solución con multiplicidad de elementos.

Después de comprender e interpretar la producción, el profesor debe proponer una orientación al alumno, que se configura como *feedback*, una forma de comunicación e interacción entre profesor y alumno (véase, por ejemplo, Black y William, 1998 o Hattie y Timperley, 2007). Existen diferentes tipos de *feedback* y, cuando el docente pretende explorar el razonamiento matemático presente en la producción (Santos; Pinto, 2009), proponiendo lineamientos claros que incentiven a los estudiantes a revisar su producción, repensar las estrategias utilizadas y desarrollar su comprensión matemática, es un *feedback* constructiva (Di Martino *et al*., 2017). Otros tipos de *feedback* (Galleguillos; Ribeiro, 2019) son: (i) *feedback* sobre cómo resolver el problema: pautas instructivas sobre los procedimientos a seguir para resolver un problema específico; (ii) retroalimentación confusa: aunque correcta, es incomprensible para el estudiante debido a la complejidad de las pautas; (iii) contraejemplo como *feedback*: contiene un ejemplo explicativo de por qué la resolución del estudiante es incorrecta; (iv) *feedback* superficial : orientación insuficiente o inconsistente, que no ayuda al estudiante a comprender sus errores.

Las categorías (i) y (ii) se asocian a una práctica instructiva, explicando al alumno cómo proceder, que no requiere que el profesor atribuya sentido al pensamiento matemático de los alumnos, imponiendo su forma de hacer. Las categorías (iii) y (iv) se asocian a prácticas evaluativas y se centran en explicar por qué la producción de los estudiantes contiene errores, pero exigen del docente una correcta interpretación de la producción, requiriendo conocimientos matemáticos que permitan al docente abordar un problema de diferentes maneras e implica que conozca varios ejemplos para que pueda explicar por qué algunas formas de proceder son incorrectas.

En el contexto de la rotación, considerando una tarea en la que se solicita identificar algún punto que permanece fijo, cuando se realiza el movimiento (rotación) y la producción de un estudiante que expresa "no tiene puntos fijos" (Silva; Ribeiro, 2023), Un ejemplo de *feedback* evaluativo implica que el profesor solo evalúe la producción como incorrecta, porque no identificó el punto fijo que es el centro de rotación e indicó el punto correcto en la producción. Un *feedback* constructivo tiene que considerar la identificación del centro de rotación, proponiendo, por ejemplo, al estudiante, una orientación para trazar algo de mediatría entre algunos puntos de la figura y sus contrapartes en la imagen, con el fin de que revise su producción e identifique el centro de rotación, encontrando esta orientación asociada a preguntas sobre qué sucede con todas las mediatrices y si se cruzan, permitiendo así al estudiante percibir que se cruzan en un único punto común, que es el centro de rotación.

Este *feedback* está asociada, y condicionada por, el nivel de conocimientos que posee el docente y sobre el cual, en el CI, se definen tres niveles (Mellone *et al*., 2017): (i) interpretación evaluativa; (ii) interpretación para la práctica docente; (iii) la interpretación como investigación.

(i) la interpretación evaluativa se asocia al nivel más bajo de CI que lleva al docente a establecer una correspondencia entre su producción y la del alumno, considerando solo como correcta su forma de proceder y cualquier producción que difiera de la suya es evaluada como incorrecta. (ii) la interpretación para la práctica docente se basa en un nivel intermedio de CI y corresponde al docente considerar lo que se expresa en la producción del estudiante, con el fin de planificar las próximas discusiones a proponer y alcanzar los objetivos del aprendizaje matemático; Por lo tanto, toma como punto de partida qué y cómo los estudiantes revelan que saben. Considerando un nivel superior de CI, tenemos (iii) la interpretación como investigación que se refiere a que el profesor revisa su propia formalización matemática, haciendo de la producción del estudiante una fuente de investigación, aunque estas producciones parezcan diferentes a lo que tradicionalmente se enseña en las escuelas, ya que, en esta práctica interpretativa, el profesor puede discutir con colegas la producción del estudiante y, También es necesario investigar otras formas de proceder, lo que permite conocer otras formas de hacer matemáticas y resolver un problema determinado, lo que resulta en la ampliación de su espacio de solución.

Para proponer *una retroalimentación* constructiva, se requiere un alto nivel de CI por parte del profesor, y el desarrollo de los conocimientos especializados del profesor requiere contextos formativos (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013) en el que se implementan y discuten las Tareas de Capacitación (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021).

Existen diferentes perspectivas sobre la Tarea para los docentes, como las Tareas de Aprendizaje Profesional (Smith, 2001; Arroyo; Ponte, 2020) o tareas formativas (Martín *et al*., 2023). Dado que nuestro foco está en el desarrollo del conocimiento del docente y no en su aprendizaje, las tareas son entendidas como un recurso especializado para la práctica profesional, de ahí las llamadas Tareas para la Formación – TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) son específicas para el desarrollo de este conocimiento especializado del docente.

Los TpF forman parte de un conjunto de documentos que se elaboran para apoyar la formación a realizar y que corresponde, en la conceptualización desarrollada en el grupo CIEspMat[5], a la denominada Tarea de Formación (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) que se compone de cuatro documentos: (i) Tarea de Capacitación; (ii) documento con las cinco dimensiones centrales para la implementación de la tarea en el aula; (iii) documento del profesor y (iv) documento del formador.

(i) Tarea de Formación: tarea que se asignará a los docentes en contextos de formación y se conceptualizará para acceder y desarrollar los Conocimientos Interpretativos y Especializados de los alumnos. Para su conceptualización, se consideran los resultados de investigaciones más recientes y los resultados de pruebas nacionales e internacionales, que identifican los temas matemáticos más problemáticos para los estudiantes (y por lo tanto también para los profesores) – en los que, por ejemplo, la resolución y formulación de problemas no son temas, sino considerados contextos de y para la discusión de temas matemáticos, y está estructurado en dos o tres partes. Todas las Partes están asociadas a los objetivos de acceso y desarrollo del conocimiento del docente, y este acceso se relaciona con el enfoque pedagógico especializado de la implementación y con la investigación que siempre

[5] CIEspMat es un grupo de Investigación y Formación que desarrolla trabajos centrados en el desarrollo del Conocimiento Interpretativo y Especializado del maestro y futuro docente de y que enseña matemáticas – desde Educación Infantil hasta Bachillerato. Disponible en: www.ciespmat.com.br. Accedido: 10 dic. 2023.

se lleva a cabo en contextos de formación, considerando la investigación y la formación de manera entrelazada. La Parte Preliminar se enfoca en alguna dimensión del conocimiento matemático o pedagógico y busca establecer un punto de partida para las discusiones a realizar: qué y cómo sabe el docente sobre el tema, qué ya hace en su práctica matemática y cómo lo hace. La Parte I se estructura a partir de una tarea para el estudiante que se espera que sea implementada por el profesor en su práctica, pero también incluye un conjunto de cuestiones que emergen de los problemas identificados en la literatura sobre el conocimiento del profesor y que se formulan alineados con el contenido de ciertos subdominios del MTSK con el fin de centrar las discusiones.

Es importante señalar que se trata de una opción formativa que permite dirigir el foco de atención principalmente a las especificidades de la práctica matemática y al conocimiento especializado que sustenta esta práctica, y que, a pesar de este enfoque direccional, la implementación de TpF posibilita que los docentes mantengan discusiones que involucren todos los subdominios de su conocimiento especializado.

Cuando el TpF contiene una Parte II, tiene como objetivo desarrollar el Conocimiento Interpretativo y se denomina Tarea Interpretativa – TI (Mellone *et al*., 2020). En esta Parte II, se incluyen algunos contextos de producciones de estudiantes o docentes (escritos, video, discusiones en el aula, discusiones en contextos formativos) elegidos por ser matemáticamente potentes para el desarrollo del CI y por atribuir significado a las formas de pensar que sustentan estas producciones y la propuesta de *feedback* constructiva.

(ii) documento con las cinco dimensiones: conjunto de indicaciones centrales para que el docente implemente, discuta y logre los objetivos de aprendizaje matemático de la tarea para el estudiante (e.g., Ribeiro y Torrezan, 2022 o Silva y Ribeiro, 2023): (1) Objetivo de aprendizaje matemático que se persigue con la tarea; (2) Recursos necesarios y forma(s) del trabajo de los estudiantes; (3) Capacidad de la Base Curricular Común Nacional (Brasil, 2018) asociada a la tarea; (4) Posibles dificultades de los estudiantes; (5) Comentarios sobre la implementación y las discusiones matemáticas asociadas.

(iii) documento del docente: engloba todos los elementos centrales del conocimiento matemático especializado del tema, considerando la conceptualización del MTSK, abordado en el TpF, que pretende ser desarrollado en los docentes participantes de la capacitación.

(iv) documento del formador: contiene un conjunto de directrices para que el formador pueda implementar el TPF, minimizando las desviaciones de los objetivos formativos que se asocian a su conceptualización, considerando la intencionalidad de la investigación asociada.

Contiene, por tanto, los objetivos formativos y de investigación, así como un conjunto de indicaciones relativas a las especificidades de la formación que se pretende llevar a cabo, detallando los objetivos de cada pregunta de TpF y los Conocimientos Especializados e Interpretativos que se espera desarrollar, así como indicaciones pedagógicas específicas para su implementación que se asocian a posibilidades de replicabilidad en contextos de práctica con estudiantes – o de juego con niños en Educación Infantil. También incluye ejemplos de preguntas y posibles respuestas de los conocimientos implicados y requeridos, así como de las discusiones que se llevarán a cabo en cada etapa[6].

Esta tríada central para la innovación que consideramos en la investigación, la práctica y la formación está compuesta por estos dos bloques previos de Conocimiento (formas de entender el conocimiento del docente y sus especificidades para la práctica, la formación y la investigación) y los recursos para la práctica, formación y recopilación de información para la investigación, solo se completa con un enfoque pedagógico de implementación y metodología que maximice y potencie la calidad de las discusiones. la sostenibilidad del desarrollo del conocimiento especializado del docente y de la investigación asociada.

Este enfoque pedagógico y metodológico especializado que hemos desarrollado y que impacta en el foco de discusión que se considera, asume dos tipos de estructura replicable: Ciclo Individual-Colectivo-Individual – ICI (Pacelli *et al*., 2020) o Ciclo Grupo Pequeño-Colectivo-Grupo Pequeño – Pg-C-Pg (Jakobsen; Arroyo; Mellone, 2022; Mellone et *al*., 2023). La diferencia entre estas estructuras está en la forma de trabajar para resolver el TpF, pues en el Ciclo ICI los docentes resuelven una parte del TpF de manera individual, posteriormente hay una discusión colectiva en un grupo grande que busca sintetizar las formas de pensar que surgieron individualmente y en el que cada uno se hace responsable del conocimiento desarrollado en este contexto y, posteriormente, después de aproximadamente un mes, los participantes deben enviar sus respuestas "revisadas y mejoradas" al mismo TPF para que se puedan identificar algunos elementos que aún deben profundizarse y se pueda realizar un análisis de los conocimientos desarrollados.

Una adaptación a este enfoque considera el hecho de que la resolución individual de la TpF no necesariamente potencia el desarrollo de un Conocimiento Interpretativo amplio y profundo (Jakobsen; Arroyo; Mellone, 2022). Así, en el Ciclo Pg-C-Pg, los docentes se organizan en grupos (idealmente cuatro participantes) para discutir, reflexionar y resolver el TpF y los dos momentos posteriores siguen la misma estructura anterior. Esta opción también

[6] Para algunos ejemplos, véase Ribeiro, Alves y Gibim (2023) o Ribeiro y Torrezan (2022).

se asocia a la necesidad de que los docentes puedan experimentar el trabajo en grupo en primera persona para que puedan llevar a cabo el mismo tipo de discusión con sus alumnos en sus prácticas.

Un ejemplo de una Tarea de Entrenamiento (Interpretativa) asociada a innovaciones

Las Tareas Formativas pueden tener diferentes estructuras y aquí centramos nuestra atención en las Tareas Interpretativas (TI) que buscan desarrollar más específicamente el Conocimiento Interpretativo de los (futuros) docentes. Este ejemplo pretende ilustrar la conceptualización del recurso para la formación y un instrumento para la recolección de información de investigación, y para ello se presenta una TI en el ámbito de la rotación y, posteriormente, se hace una discusión de las razones que llevan a la inclusión de las preguntas y producciones de los estudiantes – considerando las tres dimensiones de la innovación: teórica, de recursos, implementación.

Figura 1 – Tarea interpretativa en el ámbito de la rotación

Parte Preliminar

1. Imagina que estás en la calle y alguien te pregunta: En un contexto matemático, ¿qué es la rotación? ¿Qué le diría? (No olvide que estamos en la calle y, por lo tanto, no tenemos la intención de enseñar a esta persona).

2. El profesor Mário tiene la intención de discutir con sus alumnos de 7º grado la definición matemática de rotación. Encontró algunas definiciones y las llevará a discutir en una capacitación bajo la responsabilidad de CIEspMat, ya que necesita ayuda para saber cuál es la definición y cuál será más apropiada para discutir con sus estudiantes.
Ayude al profesor Mario a elegir la(s) definición(es) más apropiada(s) que se presenta a continuación y justifique por qué son definiciones, o no, indicando qué cambios habría que hacer para que se conviertan en definiciones.

Definiciones de rotación encontradas por el profesor Mário:

(A) En una rotación, cada figura gira en relación con un punto llamado centro de rotación. Las figuras original y girada tienen las mismas medidas, y los elementos de la figura original y girada están a la misma distancia del centro de rotación.

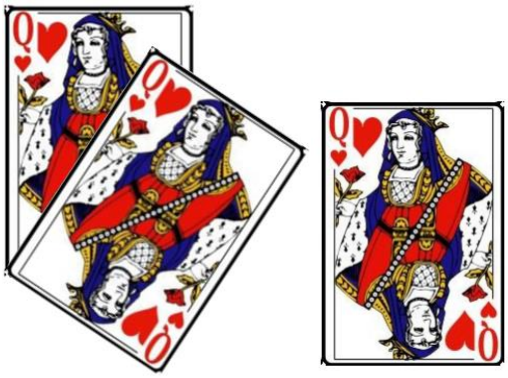
(B) La simetría de rotación se produce cuando una figura plana se gira alrededor de un punto, según un ángulo (con medición de apertura entre 0º y 360º), en una dirección determinada (en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario a las agujas del reloj). Con esto, siempre conseguimos una figura plana que mantiene la misma forma y tamaño que la figura original.

Parte I

Tarea: Cartas rotadas[7]

(Siempre debes explicar tu razonamiento describiendo el proceso que utilizas para responder a la pregunta. Puedes hacerlo usando esquemas, palabras, cálculos, ...)

Fíjate en las situaciones con cartas de la baraja de la "reina"":



Situación 2

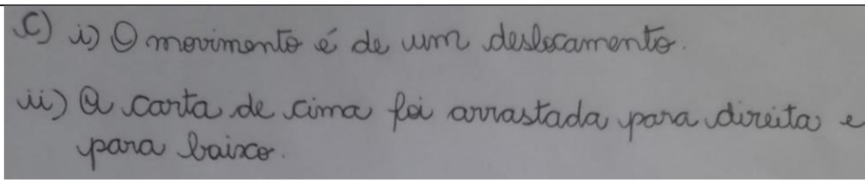
a) Registra lo que te llamó la atención mientras mirabas las tarjetas de cada una de las situaciones.
b) En la Situación 1, ¿puedes identificar qué movimiento se hizo para construir toda la tarjeta a partir de una de sus partes? Justificar.
c) En la situación 2:
   i) ¿Puedes identificar qué movimiento se hizo para obtener la nueva tarjeta? Si es así, descríbelo. Si no es así, justifique.
   ii) Explicar los trámites que se pueden realizar para obtener la nueva imagen.
d) En cada situación, ¿puedes identificar un punto que permanezca fijo cuando se realiza el movimiento? Justificar.

1. Considere la tarea anterior:
   (i) Resuelva la tarea por su cuenta, sin pensar en un contexto de enseñanza.
   (ii) ¿Cuáles crees que serán las mayores dificultades matemáticas para que los estudiantes resuelvan esta tarea? Justifica tu respuesta.
   (iii) ¿Qué necesitan saber los estudiantes para realizar esta tarea? Justifica tu respuesta.

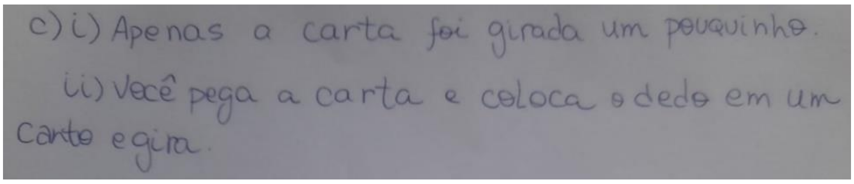
Parte II

1. Después de implementar esta tarea con sus alumnos de 7º grado D, el profesor Mário obtuvo algunas respuestas y también decidió llevarlas a discutir en la capacitación del CIEspMat. Ver las producciones de las alumnas Aline y Camila respecto a las preguntas c) y d) de la tarea para el alumno:

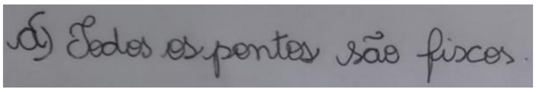
[7] Adaptado de Paques y Oliveira (2012).



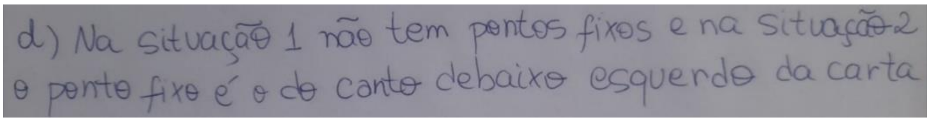
La producción de Aline para la pregunta c).



Producción de Camila para La pregunta c).



La producción de Aline para la pregunta d).



Producción de Camila para La pregunta d).

a) Para cada una de las producciones, indique si las considera matemáticamente correctas (adecuadas) o no, justificando el razonamiento matemático evidenciado.
b) Para cada uno de los estudiantes, proporcionar *feedback* constructivo (más que decir si es correcta o incorrecta al profesor, es necesario atribuir significado a las resoluciones de los estudiantes para luego ayudar en el desarrollo de sus conocimientos matemáticos).

Fuente: Elaboración propia

En la Parte Preliminar se incluyen dos preguntas orientadas a acceder y desarrollar los contenidos KoT del profesor. En la pregunta 1, el objetivo es acceder (y desarrollar a través de discusiones posteriores) el conocimiento del docente asociado a la fenomenología de la rotación temática – situar la pregunta en un contexto "típicamente no educativo" pretende sacar al docente de un contexto de "explicar cómo lo haría en el aula", ya que la intención es acceder a sus conocimientos matemáticos especializados y no a sus enfoques pedagógicos.

En la pregunta 2, la atención se centra en el conocimiento del profesor asociado a lo que supone que es una definición matemática (Zazkis; Leikin, 2008) – matemáticamente válido – y eso es comprensible para sus estudiantes. También se busca promover una reflexión crítica sobre las "pseudo definiciones" que se encuentran en muchos materiales pedagógicos (aquí libros de texto) y sobre la necesidad de conocimientos que permitan mejorar estas propuestas pedagógicas para la discusión en el aula, además, a través de la discusión de este tema, saber que existen diferentes definiciones matemáticas para una misma entidad matemática. Esta inclusión considera la necesidad de tener en cuenta que los estudiantes tienen dificultades en la interpretación y uso de las definiciones (Mariotti; Fischbein, 1997; Zazkis; Leikin, 2008), y es fundamental que el docente elija definiciones que sean didácticamente adecuadas al grupo etario de los estudiantes y al contexto de enseñanza, teniendo como punto de partida definiciones que contemplen lo que los estudiantes ya saben.

En la Parte I, una tarea para estudiantes de 7º grado (12 o 13 años) se incluye dentro de un rectángulo, de acuerdo con los documentos oficiales del currículo brasileño (Brasil, 2018) y tres preguntas para los docentes. Esta tarea para los estudiantes persigue el objetivo del aprendizaje matemático (parte de las cinco dimensiones): desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre la rotación de transformación geométrica isométrica, en lo que respecta a la identificación de sus elementos constitutivos y los procedimientos realizados para realizar la rotación, a partir de imágenes giradas.

Cabe destacar que las tareas para los estudiantes siempre se formulan considerando las mayores dificultades identificadas en los resultados de la investigación. Aunque, en el contexto de la rotación, estas dificultades se asocian, por ejemplo, a la identificación del centro de rotación, sobre todo cuando no pertenece a la figura (Gaspar; Cabrita, 2014; Küchemann, 1981), en esta tarea, ya que se trata de una introducción (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) y para tomar como punto de partida algo que los docentes conocen -tarea "propia del material didáctico"- se optó por incluir ejemplos cuyos centros de rotación pertenezcan a la figura, ya que el objetivo no es dificultar la tarea al alumno, sino desarrollar su comprensión matemática y sus formas de pensar matemáticamente.

En las preguntas para el profesor, al pedirles que resuelvan la tarea por sí mismos (pregunta (i)) se pretende acceder a conocimientos matemáticos al nivel de los conocimientos de los alumnos (resolver la misma tarea que se espera que resuelvan los alumnos). En este caso concreto, se asocia a la correcta identificación del movimiento realizado (a)); los procedimientos realizados para la obtención de la imagen mediante rotación b) y c) - i)); diferenciar la rotación de las otras transformaciones isométricas (c) – (ii)); procedimientos asociados a la rotación y los elementos constitutivos que determinan esta transformación d)).

Al pedir a los profesores que identifiquen las mayores dificultades matemáticas de los alumnos para resolver esta tarea (pregunta (ii)), se pretende iniciar el movimiento de los profesores líderes para instituir el hábito mental de anticipar las posibles respuestas de sus alumnos, considerándolos para la planificación y puesta en práctica de las discusiones matemáticas. Esta anticipación también se asocia con el enfoque que se pretende en la Parte II para contribuir a identificar y atribuir significados a los errores de los estudiantes y a sus formas de pensar matemáticamente. La pregunta (iii) tiene como objetivo acceder y desarrollar el conocimiento del profesor sobre lo que los estudiantes saben (qué y cómo saben o deberían saber) que apoyaría el cumplimiento de la tarea (pregunta 1 – iii)). Esto incluye, por ejemplo, conocer la noción de ángulo, asociada a la amplitud y dirección del ángulo de rotación y, en base a esto, discutir con los estudiantes los procedimientos a realizar para medir la amplitud de un ángulo, lo que posiblemente incluiría retomar y cuestionar a los estudiantes lo que saben sobre el uso del transportador. siempre desde una perspectiva de indagación y no en "dar la regla". Además, si los alumnos ya conocen la reflexión central, el profesor puede problematizar la equivalencia entre la reflexión central y la rotación de 180º (Bairral; Silva, 2010) considerando la Situación 1 de la tarea para el estudiante.

En la Parte II, la atención se centra en el conocimiento interpretativo del profesor. Con este fin, en esta tarea, se incluyen varias producciones de los estudiantes para la Tarea del Estudiante en la Parte I y se le pide al profesor que interprete y asigne significado a las formas de pensar y proceder en matemáticas que sustentan estas producciones proporcionando un *feedback* constructiva para cada alumno. Las preguntas buscan acceder al nivel de Conocimiento Interpretativo y, a través de discusiones posteriores, promover un cambio en el nivel de este conocimiento. Asociado a la implementación de TI implementando el Ciclo Pg-C-Pg, tenemos un breve documento que discute qué es y qué no es un *feedback* constructiva, por el tipo y la naturaleza de esta *feedback* se asocia con los niveles de CI revelados por los profesores. Cabe destacar que la forma en que concebimos el rol y el conocimiento del docente (Almeida; Arroyo; Fiorentini, 2021) se relaciona con la comprensión de cómo el propio formador planifica e implementa sus prácticas formativas (Ferreira; Behrens; Teixeira, 2019), que puede ser generalista o dirigida a desarrollar las especificidades del conocimiento del docente.

En esta Parte, las producciones de los estudiantes que se incluyen son de fundamental importancia y su selección (o elaboración a partir de los resultados de la investigación) está asociada a las especificidades de la intencionalidad formativa que se considera. Cada uno de ellos se incluye porque está asociado a una discusión matemática específica y, simultáneamente, en conjunto, estas producciones necesitan posibilitar un cambio en el nivel de conocimiento que demanda el desarrollo de la comprensión del fenómeno de rotación. Estas producciones de los estudiantes, aquí centradas en los errores, se asocian a un cambio en las concepciones relacionadas con el error (Borasi, 1987) y su uso pedagógico como punto de partida para el desarrollo del conocimiento de los estudiantes y el contexto se asocia con el desarrollo del hábito de desarrollar una práctica matemática interpretativa basada en la atribución de significado a los motivos matemáticos que sustentan las producciones de los estudiantes. sí son inadecuadas o contienen enfoques inesperados[8] para que el profesor repiense su propia formalización matemática y amplíe su espacio de solución (Ribeiro, 2024), – pueda incorporar un mayor número de elementos a este espacio de solución.

Se incluyó la producción de Aline para la pregunta c), ya que presenta una respuesta incompleta al movimiento realizado, expresando la rotación solo como un desplazamiento (en i)), sin especificar que este desplazamiento está en relación con un ángulo, y el término desplazamiento también puede usarse para referirse a la traslación; considera el movimiento como dos traslaciones (pregunta II)), lo que permite discutir la diferencia entre las transformaciones geométricas isométricas -además de los nombres-, como los procedimientos (algoritmos) involucrados y el resultado obtenido (imagen). En d) no se identifica que se realizó un movimiento para obtener la carta completa de una de sus mitades, lo que permite traer a la discusión la dificultad relacionada con visualizar la rotación ya realizada y la falta de comprensión de que las transformaciones geométricas isométricas están asociadas a la idea de un movimiento rígido que mantiene distancias y amplitud de ángulos, lo que implica que la figura original y la imagen por transformación son congruentes.

Se incluyó la producción de Camila para la pregunta c), ya que se asocia a una comprensión de la rotación como una revolución, pero no especifica la amplitud ni la dirección del ángulo de rotación, que son dos elementos fundamentales para la comprensión de la rotación. También permite una discusión asociada a los procedimientos para realizar la rotación y la posibilidad de su generalización, configurando así la existencia de un algoritmo. En la pregunta d), la producción permite discutir la dificultad y el problema de identificar el centro de rotación como el único punto que permanece fijo al realizar la rotación – en ambas situaciones pertenece a la figura – pero es esencial discutir cómo identificar el centro de rotación determinando las mediadoras entre los puntos de la figura original y sus contrapartes en la imagen.

Pidiéndoles a los maestros que proporcionen un *feedback* constructiva (pregunta b)), se pretende situar al docente en el contexto de una práctica interpretativa, animándole a proponer un *feedback* constructivas (Di Martino *et al*., 2017; Mellone et *al*., 2020), yendo más allá de

[8] Por ejemplo, en Jakobsen, Ribeiro y Mellone (2014) se presentan y discuten algunas producciones inesperadas (que no forman parte del espacio habitual de solución de los docentes) en el contexto de los racionales.

una perspectiva meramente evaluativa (véase, por ejemplo, Ribeiro, 2024). Esto requiere que el profesor "escuche" efectivamente el pensamiento matemático de los alumnos, que va mucho más allá de una lectura directa y descripción de lo grabado (copia) o de una "escucha sensorial", y requiere una escucha que, de hecho, considere como punto de partida qué y cómo los alumnos se revelan a conocer y, a partir de esta escucha activa, Proponer pautas claras y objetivas que ayuden a los estudiantes a desarrollar su comprensión matemática.

Algunos comentarios finales

Para innovar, es necesario pensar y hacer de manera diferente a lo que se ha hecho hasta ahora, y este hacer diferente de manera innovadora indica otras posibilidades y caminos que no se habían previsto hasta entonces, pero que son posibles e impactantes para los contextos y objetivos asociados. En nuestro contexto, estas formas y enfoques innovadores ya revelan resultados en investigaciones específicas previas que buscan identificar lo que sucede en un momento dado, tomando fotos de lo que sucede en cada momento (véase, por ejemplo, Couto y Ribeiro, 2019; Ribeiro, Jakobsen y Mellone 2022), que indican un conjunto de posibilidades para "mirar cada marco" y comprender qué conduce al desarrollo del conocimiento y permitir que estos motivos y enfoques se generalicen a otros temas y tópicos.

Las formas de entender el conocimiento del profesor específicamente relacionadas con su práctica profesional y que permiten a los estudiantes comprender las matemáticas y desarrollar sus formas de pensar matemáticamente (incluidas aquí en (i) innovaciones teóricas) es algo que rompe con un conjunto de prácticas de investigación y formación que asumen primordialmente el conocimiento del profesor en el ámbito de las generalidades (Shulman, 1987; Ribeiro, 2018) y focalizar la formación en cuestiones de conocimientos pedagógicos generales sin la necesaria discusión de conocimientos matemáticos específicamente relacionados con la práctica profesional del docente (Fiorentini; Crecci, 2017) que permitirá cambiar el enfoque y los objetivos de esta práctica a objetivos de mediano y largo plazo.

Por otro lado, los recursos han sido foco de atención en varias investigaciones (y formación) en Educación Matemática (Grando, 2015), pero también allí el foco ha estado a menudo en el recurso en sí mismo y no en las discusiones matemáticas que cada uno de estos recursos potencia o imposibilita y sus impactos en las discusiones y el aprendizaje matemático de los estudiantes. Al considerar las propias Tareas Formativas, que se conceptualizan en función de las mayores dificultades matemáticas de los estudiantes, y centrándose en las especificidades del conocimiento del profesor como recurso para la formación y la propia investigación, esperamos que los resultados se dirijan al aprendizaje matemático y al desarrollo del conocimiento especializado del profesor. El TpF que se presentó ilustró esta perspectiva de (ii) innovación de recursos para la formación y recolección de información. Innovación de recursos para la formación porque, aunque se considera una tarea para los estudiantes, el objetivo de la formación no es "cómo implementarla con los estudiantes en el aula", sino que la discusión prioriza el desarrollo de conocimientos matemáticos especializados que permitan discusiones matemáticas de un nivel superior a las que se producirían si estos conocimientos matemáticos se limitaran al "saber hacer". La multiplicidad de formas y posibilidades de cómo implementar la tarea con los estudiantes (conocimientos pedagógicos especializados) es algo que se aborda de manera transversal y asumiendo una perspectiva de que este conocimiento pedagógico especializado "no se enseña, se vive", así como no se enseña a pensar, sino que se promueven formas de desarrollar este pensamiento.

Asociados a las discusiones sobre la vivencia del conocimiento pedagógico se encuentran enfoques de recolección de información que buscan contribuir, de manera entrelazada, al desarrollo del conocimiento especializado de manera sostenida – asociado al tercer tipo de innovación (iii) el enfoque metodológico para la implementación de las Tareas para la Formación y la conceptualización de las Tareas Formativas – correspondientes a los enfoques metodológicos ICI y Pg-G-Pg. Debido a la etapa en la que se encuentra la investigación asociada a las Transformaciones Geométricas Isométricas y la simetría ([9] ejemplo de la TpF presentada), no traemos ejemplos del impacto de estos enfoques metodológicos en la riqueza de la información recolectada para acceder y discutir las especificidades del Conocimiento Interpretativo y Especializado, pero dejamos abiertas algunas preguntas que pueden ser el foco de investigación que nos ayude a avanzar en el conocimiento que tenemos sobre el tema y el conocimiento y la práctica Matemáticas del profesor.

Así, algunas cuestiones emergentes que pueden abrir una agenda de investigación con este enfoque especializado en conocimientos, tareas y enfoques metodológicos son:

(i) ¿Qué conocimientos interpretativos revelan los docentes al interpretar y atribuir significado a las producciones de los estudiantes?

[9] Esta investigación ha entrado ahora en la fase de recogida de información en un contexto formativo diseñado asociado a estos tres tipos de innovación, por lo que pronto tendremos resultados sobre la aplicabilidad e impacto de las tres dimensiones para la investigación y la formación.

(ii) ¿Qué niveles de Conocimiento Interpretativo podemos identificar a lo largo de una capacitación y cómo cambian estos niveles a lo largo del año en relación con las Tareas de Capacitación y las discusiones desarrolladas?

(iii) ¿Cuáles son las características de las Tareas Formativas que maximizan el desarrollo de las especificidades de los conocimientos del docente?

AGRADECIMIENTOS: El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación financiado por el CNPq "Desarrollo del Conocimiento Interpretativo y Especializado del profesor y sus relaciones con las Tareas de Formación en el ámbito de la Medición y el Pensamiento Algebraico, Geométrico y Estadístico" (404959/2021-0).

REFERENCIAS

ALMEIDA, M.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. Mathematical Specialized Knowledge of a Mathematics Teacher Educator for Teaching Divisibility. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, v. 15, p. 187-210, 2021. Disponible en: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/15778. Acceso en: 10 agosto 2023.

BAIRRAL, M. A.; SILVA, M. A. **Instrumentação do Ensino da Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/255647628_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Special. Acceso en: 10 agosto 2024.

BAUMERT, J.; KUNTER, M.; BLUM, W.; BRUNNER, M; VOSS, T.; JORDAN, A.; KLUSMANN, U.; KRAUSS, S.; NEUBRAND, M.; TSAI, Y. Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. **American Educational Research Journal**, v. 47, n. 1, p. 133-180, 2010. Disponible en: https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/0002831209345157. Acceso en: 12 agosto 2024.

BIZA, I.; KAYALI, L.; MOUSTAPHA-CORRÊA, B.; NARDI, E.; THOMA, A. Afinando o Foco em Matemática: Desenho, Implementação e Avaliação de Atividades MathTASK para a Formação de Professores de Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-41, 3 agosto 2021. Disponible en: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13407. Acceso en: 10 agosto 2024.

BLACK, P.; WILIAM, D. Assessment and Classroom Learning. **Assessment in Education: Principles, Policy & Practice**, v. 5, n. 1, p. 7-74, 1998. Disponible en: https://www.gla.ac.uk/t4/learningandteaching/files/PGCTHE/BlackandWiliam1998.pdf. Acceso en: 17 agosto 2023.

BORASI, R. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. **For the Learning of Mathematics**, v. 7, n. 3, p. 2-8, 1987. Disponible en: https://www.semanticscholar.org/paper/Exploring-Mathematics-through-the-Analysis-of-Borasi/ecbdbeff03db2c2b54b735133a399d88cad3cbeb. Acceso en: 10 agosto 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

BREDA, A.; SERRAZINA, L.; MENEZES, L.; SOUSA, H.; OLIVEIRA, P. **Geometria e Medida no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2011.

CAMACHO, A. M. R.; GUERRERO, L. S. Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón. **Quadrante**, v. 28, n. 2, p. 100-124, 2019. Disponible en: https://quadrante.apm.pt/article/view/23029. Acceso en: 10 agosto 2023.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L.C.; FLORES-MEDRANO, E; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ -CATALÃN, M.C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, **Research in Mathematics Education**, v. 20. n. 3, p. 236-253, 2018.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Learning and Teaching Early Math**: the learning trajectory approach. 3. ed. London: Routledge, 2020.

COUTO, S.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado de futuros professores da educação infantil e dos anos iniciais quanto às dificuldades de aprendizagem de alunos cegos e videntes sobre paralelismo. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 4, n. 3, p. 701-721, 2019. Disponible en: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/10544/7383. Acceso en: 10 agosto 2023.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational studies in mathematics**, v. 61, p. 293-319, 2006. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-2372-4. Acesso em: 10 agosto 2023.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M; MINICHINI, C.; RIBEIRO, M. Prospective teachers' interpretative knowledge: giving sense to subtraction algorithms. *In*: **Proceedings of Third ERME Topic Conference on Mathematics Teacher Education**. p. 66-75. 2017.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge. *In*: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer International Publishing, p. 424-428, 2020.

DUVAL, R. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 16, n. 3, p. 349-382, 1996. Disponible en: https://revue-rdm.com/1996/quel-cognitif-retenir-en/. Acceso en: 10 agosto 2023.

FERREIRA, J.L.; BEHRENS, M. A.; TEIXEIRA, A. M. Formação de professores para atuar no ensino superior, tecnológico e técnico. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 14, n. 1, p.123-137, jan./mar., 2019. Disponible en: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/11132. Acceso en: 10 agosto 2023.

FRANCIOLI, F. A. S.; SILVA, N. M. M. Pressupostos psicológicos e didáticos para a resolução de problemas matemáticos. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 16, n. 4, p. 2648-2662, out./dez. 2021. Disponible en: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/13612. Acceso en: 10 agosto 2023.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. **Zetetiké**, v. 25, p. 164-185, 2017. Disponible en: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647773. Acceso en: 10 agosto 2023.

FLORES-MEDRANO, E. Conocimiento de la practica matematica (KPM). *In*: CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; MONTES, M. (eds.). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. **Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva**. SGSE: Huelva, 2016.

GALLEGUILLOS, J.; RIBEIRO, M. Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. *In*: **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME, p. 1-8, 2019.

GASPAR, J. M. P.; CABRITA, I. GeoGebra e ferramentas tradicionais – Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias**. Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Braga: APM., 169-190. 2014.

GOMES, A. Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *In*: **Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: APM p. 233-243, 2012.

GRANDO, R. C. Recursos Didáticos na Educação Matemática: Jogos e Materiais Manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 5, n. 02, p. 393-416, 2015. Disponible en: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/117. Acceso en: 10 agosto 2023.

GROSSMAN, P. Learning to practice: The design of clinical experience in teacher preparation. **Policy Brief**, p. 1-8, 2010.

HATTIE, J.; TIMPERLEY, H. The Power of Feedback. **Review of Educational Research**, v. 77, n. 1, p. 81-112, 2007. Disponible en: https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/003465430298487. Acceso en: 10 agosto 2023.

JAKOBSEN, A.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. A methodological approach to the development of prospective teachers' interpretative knowledge. *In*: **CERME12**. Italy: Bozen-Bolzano, 2022.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, p. 135-150, 2014. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/307558474_Norwegian_prospective_teachers'_MKT_when_interpreting_pupils'_productions_on_a_fraction_task. Acceso en: 10 agosto 2023.

JONES, K. Re-imagining geometry education in schools. *In*: SILLER, H.; WEIGEL, W.; WÖRLER, J. F. (org.). **Beiträge zum Mathematikunterricht 2020 auf der 54 Jahrestagung der Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik (GDM):** WTM-Verlag. [*S. l.: s. n.*], 2020. p. 31-38.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional. In: **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, p. 101-144, 1976.

KÜCHEMANN, D. Reflections and rotations. *In*: HART, K. (ed.). **Childrens understanding of mathematics**. London: John Murray, 1981.

LIMA, E. L. **Coordenadas no plano:** geometria analítica, vetores e transformações geométricas. 2 ed. Rio de Janeiro: GRAFTEX Comunicação Visual, 1992.

LIMA, E. L. **Isometrias**. SBM, 1996.

LIÑAN, M. M.; CONTRERAS, L. C.; BARRERA, V. Conocimiento de los Temas (KoT). *In:* CARRILLO, L.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. (ed.). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. **Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva**. Huelva: SGSE, 2016. p. 12-20.

LOPES, Q. V; TIROLI, L. G.; SANTOS, A. R. J.; FAVINHA, M. E. S. A praxis enquanto categoria fundante na constituição da formação de professores sob a perspectiva da pedagogia histórico-crítica. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 17, n. esp. 1, p. 967-980, mar. 2022.

MA, L. **Knowing and Teaching Elementary Mathematics**: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series). 1999.

MARIOTTI, M. A.; FISCHBEIN, E. Defining in Classroom Activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 219-248, 1997.

MARTÍN, M. I. P.; RODRÍGUEZ, N. C.; VALCARCE, M.C; DÍAZ, J. P. M.; GONZÁLEZ, L. C. C. Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado. Continuación de la antigua Revista de Escuelas Normales**, v. 98, n. 37.2, 2023.

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. St Albans: Tarquin, 2006.

MELLONE, M.; JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; PARLATI, A. Ethical dimension in the use of interpretative tasks in mathematics teacher education: division of fractions. *In*: **CERME 13**. Budapest, Hungary, 2023.

MELLONE, M.; RIBEIRO, M; JAKOBSEN, A.; CAROTENUTO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 154-167, 2020.

MELLONE, M.; TORTORA, R.; JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M. Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. *In*: **CERME 10**. Dublin, Ireland, 2017.

MITCHELL, R. N.; MARIN, K. A. Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 18, p. 551-575, 2015.

MONTES, M.A; CLIMENT, N. Conocimiento de la estructura matematica (KSM). In: CARRILLO, L.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. (ed.). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. **Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.** Huelva: SGSE, 2016. P. 21-29.

MOYER, J. C. The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 9, n. 2, p. 83-93, 1978.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

PACELLI, T.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M; JAKOBSEN, A. Collective discussions for the development of interpretative knowledge in mathematics teacher education. *In*: BORKO, H; PORTARI, D (ed.). **Proceedings of The Twenty-Fifth ICMI Study, Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups**. Lisbon: University of Lisbon, 2020. p. 388-395.

PAQUES, O. T. W., OLIVEIRA, S. R. Oferenda musical de Bach. **Série Matemática na Escola**. Guia do professor, versão para tela, p. 9. 2012. Disponible en https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1143. Acceso en: 10 dic. 2023.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência. 1975.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

RADFORD, L. Mathematics teaching and learning as an ethical event. **La matematica e la sua didattica**, v. 29, n. 2, p. 185-198, 2021.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. da. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 28, p. e020027, 2020.

RIBEIRO, C. M. Del cero hasta más allá del infinito – algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro “también” a largo plazo. *In*: BERCIANO, A; GUTIÉRREZ, G; ESTEPA, A; CLIMENT, N (ed.). **Investigación en Educación Matemática XVII**. Bilbao: SEIEM, 2013. p. 71-85.

RIBEIRO, M. Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração. **Debates em Educação**, v. 16, n. 38, e16020, 2024.
RIBEIRO, M. Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática: metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo. *In*: **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. Biblioteca do Educador. Brasil: SBEM, 2018. v. 13, p. 167-185.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. **Atribuir significado aos sentidos e ao algoritmo da multiplicação para a melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas**. Coleção CIEspMat – Formação. Campinas: Cognoscere, 2022. v. 6.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIBEIRO, M.; ALVES, C.; GIBIM, G. **Entendendo as propriedades da multiplicação e a estrutura matem tica associada tabuada como contexto para desenvolver o Pensamento Alg brico**. Coleção CIEspMat – Formação. Campinas: Cognoscere, 2023. v. 11.

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 15, p. 277-310, 2012.

RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; MELLONE, M. El Conocimiento Interpretativo en el contexto de la medición *In*: **Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (mtsk)**: 10 años de camino. 1. ed. Madrid: Editorial DYKINSON, S.L., 2022. v. 1, p. 277-290.

RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Characterizing prospective teachers’ knowledge in/for interpreting students’ solutions. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 37., 2013. **Proceedings […]**. Kiel: PME, 2013. p. 89-96.

RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students’ non standardreasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, n. 36, v. 2, p.8-13, 2016.

RIBEIRO, M., TORREZAN, E. **Conhecimento e prática matemática do professor para entender a medida de uma distância**. Coleção CIEspMat – Formação. Campinas: Cognoscere, 2022. v. 9.

ROWLAND, T; TURNER, F; THWAITES, A; HUCKSTEP, P. **Developing primary mathematics teaching**: Reflecting on practice with the knowledge quartet. London: SAGE, 2009.

SANTOS, L.; PINTO, L. Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FPR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33., 2009, Thessaloníki. **Proceedings […]**. Thessaloníki, Greece: PME, 2009. p. 49-56.

SCHOENFELD, A. H. Models of the Teaching Process. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, n. 3, p. 243-261, 2000.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, C.; RIBEIRO, M. Discutindo uma Tarefa para a Formação como recurso para desenvolver o Conhecimento Interpretativo do professor no âmbito da rotação. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 33., Barcelos. **Atas do [...]**. Barcelos: APM., 2023.

SMITH, M. S. **Practice-based professional development for teachers of mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.; HENNINGSEN, M.; SILVER, E. A. **Implementing standards-based mathematics instruction**: a Casebook for Professional Development. New York: Teachers College Press, 2000.

WASSERMAN, N. H.; FUKAWA-CONNELLY, T.; WEBER, K.; MEJ A, J. P.; ABBOTT, S. **Understanding analysis and its connections to Secondary mathematics Teaching**. [*S. l.*]: Springer Nature, 2022.

WATSON, A.; SULLIVAN, P. Teachers learning about tasks and lessons. *In*: TIROSH, D; WOOD, T (ed.). **Tools and processes in mathematics teacher education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 109-135.

ZASLAVSKY, O.; LEIKIN, R. Professional development of mathematics teacher educators: Growth through practice**. Journal of mathematics teacher education**, v. 7, p. 5-32, 2004.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of a square. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, p. 131-148, 2008.

Reconocimientos: El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación financiado por el CNPq "Desarrollo del Conocimiento Interpretativo y Especializado del docente y sus relaciones con las Tareas de Capacitación en el ámbito de la Medición, y el Pensamiento Algebraico, Geométrico y Estadístico" (404959/2021-0).
Financiación: CNPQ: (número de proyecto 404959/2021-0).
Conflictos de intereses: No aplicable.
Aprobación ética: Esta investigación fue aprobada por el Comité de Ética en Investigación del CAAE: 60427622.6.0000.8142.
Disponibilidad de datos y material: No aplicable.
Contribuciones de los autores: Los autores también contribuyeron a la preparación del artículo.

Procesamiento y edición: Editora Iberoamericana de Educación - EIAE.
Corrección, formateo, normalización y traducción.