DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS FENOMENOLÓGICAS CON INTEGRACIÓN DE LA TECNOLOGÍA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

DESENHO DE TAREFAS MATEMÁTICAS FENOMENOLÓGICAS COM INTEGRAÇÃO DE TECNOLOGIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

DESIGN OF PHENOMENOLOGICAL MATHEMATICAL TASKS WITH INTEGRATION OF TECHNOLOGY IN THE INITIAL TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS

Luis Fabián GUTIÉRREZ-FALLAS[1]
e-mail: luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr

Cómo hacer referencia a este artículo:

GUTIÉRREZ-FALLAS, L. F. Diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de matemática. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 19, n. esp. 2, e024074, 2024. e-ISSN: 1982-5587. DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18999

| **Presentado en**: 02/02/2024
| **Revisiones requeridas en**: 18/03/2024
| **Aprobado en**: 13/04/2024
| **Publicado en**: 20/07/2024

[1] Universidad de Costa Rica (UCR), San José – Costa Rica. Profesor e Investigador del Departamento de Educación Matemática de la Escuela de Matemática de la UCR.

RESUMEN: La fenomenología didáctica está presente en los currículos escolares que promueven un enfoque funcional de las Matemáticas, en donde se busca la resolución de tareas contextualizadas en fenómenos reales que hagan evidente la aplicación de la Matemática para comprender, interpretar y resolver problemas. El diseño de estas tareas es una actividad del profesor de Matemática, por lo que resulta relevante que los programas de formación inicial de profesores de Matemática ofrezcan oportunidades para diseñar tareas que respondan a estas demandas. Este texto tiene el objetivo de analizar la operacionalización de los principios que orientan el diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología, basado en el modelo del Ciclo Fenomenológico Escolar (CFE) en el contexto de formación inicial de profesores de Matemática. Los resultados aquí presentados forman parte de un estudio que se desarrolló por tres años siguiendo una metodología cualitativa, en este caso, se presenta el análisis de dos tareas matemáticas cuyos resultados evidencian las distintas consideraciones matemáticas y didáctico-matemáticas en el diseño de tareas para la enseñanza de la función lineal.

PALABRAS CLAVE: Formación inicial de profesores de Matemática. Tareas matemáticas. Integración de la tecnología. Fenomenología didáctica.

RESUMO: *A fenomenologia didática está presente nos currículos escolares que promovem uma abordagem funcional da Matemática, onde se procura a resolução de tarefas contextualizadas em fenómenos reais que tornem evidente a aplicação da Matemática para compreender, interpretar e resolver problemas. O design destas tarefas é uma atividade do professor de Matemática, pelo que é relevante que os programas de formação inicial de professores de Matemática ofereçam oportunidades para elaborar tarefas que respondam a estas exigências. Este texto tem como objetivo analisar a operacionalização dos princípios que norteiam o desenho de tarefas matemáticas fenomenológicas com integração de tecnologia, com base no modelo do Ciclo Fenomenológico Escolar (CFE) no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Os resultados aqui apresentados fazem parte de um estudo desenvolvido durante três anos seguindo uma metodologia qualitativa. Neste caso, é apresentada a análise de duas tarefas matemáticas, cujos resultados mostram as diferentes considerações matemáticas e didático-matemáticas no design de tarefas para o ensino de função linear*

PALAVRAS-CHAVE: *Formação inicial de professores de Matemática. Tarefas matemáticas. Integração da tecnologia. Fenomenologia didática.*

ABSTRACT: *Didactic phenomenology is present in school curricula that promote a functional approach to Mathematics, where the resolution of tasks contextualized in real phenomena is sought that make evident the application of Mathematics to understand, interpret and solve problems. The design of these tasks is an activity of the Mathematics teacher, so it is relevant that initial training programs for Mathematics teachers offer opportunities to design tasks that respond to these demands. This text aims to analyze the operationalization of the principles that guide the design of phenomenological mathematical tasks with integration of technology, based on the model of the School Phenomenological Cycle (SPC) in the context of initial training of Mathematics teachers. The results presented here are part of a study that was developed for three years following a qualitative methodology. In this case, the analysis of two mathematical tasks is presented, the results of which show the different mathematical and didactic-mathematical considerations in the design of tasks for the linear function teaching.*

KEYWORDS: *Initial teacher training. Mathematical tasks. Technology integration. Didactic phenomenology.*

Introducción

Un problema permanente en Educación Matemática es cómo diseñar programas de formación inicial de profesores que influyan en la naturaleza y calidad de la práctica docente porque, según Hiebert *et al.* (2003), la enseñanza es una práctica cultural. Según estos autores, los profesores aprenden a enseñar, en parte, al crecer en una cultura en la que son aprendices pasivos durante 12 años o más mientras son estudiantes en la escuela y, en consecuencia, "cuando se enfrentan a los desafíos reales del aula, a menudo abandonan nuevas prácticas y regresan a los métodos de enseñanza utilizados por sus profesores" (Hiebert *et al.*, 2003, p. 201, nuestra traducción).

Concebirse como una práctica cultural implica también responder a las demandas de esa cultura, por lo que los programas de formación inicial de profesores deben garantizar corresponder a las exigencias del siglo XXI en cuanto al desarrollo de un conocimiento profesional complejo e integrador, pero también flexible y dinámico, que caracterice a un profesor de Matemática competente y eficiente. Para Serrazina (2012), "¿qué formación debe tener un docente para enfrentar todos los desafíos que se le presentan?, es una pregunta que ha recibido la atención de muchos formadores e investigadores, y para la cual no hay una respuesta única" (p. 267, nuestra traducción).

En particular, la Educación Matemática se ha transformado significativamente mediante el uso de tecnologías digitales con capacidades computacionales, gráficas y simbólicas avanzadas (Niess, 2012). En este contexto, documentos curriculares internacionales argumentan que la tecnología juega un papel fundamental en la enseñanza, creando ambientes de aprendizaje que "integran el uso de herramientas matemáticas y tecnológicas como recursos esenciales para ayudar a los estudiantes a aprender y dar sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y comunicar su pensamiento matemático" (NCTM, 2014, p. 78, nuestra traducción). Así, la existencia, versatilidad y poder de la tecnología conducen a una reestructuración de qué y cómo los estudiantes deben aprender Matemáticas, teniendo en cuenta sus preferencias y nuevas formas de aprender.

El aprendizaje de los estudiantes es condicionado por las tareas matemáticas que propone su profesor (Penalva; Llinares, 2011), por lo que, dentro de este contexto, las tareas matemáticas por un lado deben evidenciar la aplicabilidad de la Matemática para la resolución de tareas contextualizadas en fenómenos que rodean al estudiante y, por otro lado, deben propiciar el uso de herramientas tecnológicas eficientes.

Este texto forma parte de un estudio que se desarrolló por tres años siguiendo una metodología cualitativa, en el contexto de formación inicial de profesores de Matemática. El planteamiento de la problemática radica en el diseño de tareas para promover la enseñanza del tema de Funciones en secundaria, tareas que contemplen la aplicación del conocimiento matemático en contextos fenomenológicos y la integración de la tecnología para la exploración de la tarea. De acuerdo con Simon (2008), la formación de profesores de Matemática es un espacio caracterizado por su naturaleza compleja, sin embargo, esto también implica una relevancia significativa en si misma en cuanto a la comprensión de elementos presentes en la formación de futuros profesores de Matemática.

> La formación de profesores de Matemática es más difícil y compleja que la Educación Matemática, porque abarca esta última. Asimismo, la investigación en formación de profesores de Matemáticas es más difícil y compleja que la investigación en Educación Matemática (Simon, 2008, p. 27, nuestra traducción).

El presente texto tiene el objetivo de analizar la operacionalización de los principios que orientan el diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología, basado en el modelo del ciclo fenomenológico escolar en el contexto de formación inicial de profesores de Matemática. En este caso, se presenta el análisis de dos tareas matemáticas cuyos resultados evidencian las distintas consideraciones matemáticas y didáctico-matemáticas en el diseño de tareas para la enseñanza de la función lineal.

Formación inicial de profesores de Matemática

En las últimas dos décadas, la investigación y las orientaciones internacionales se han pronunciado por un mayor énfasis en que la Enseñanza de las Matemáticas promueva, entre otras cosas, el razonamiento matemático, la resolución de problemas y el uso de la tecnología (NCTM, 2014). Este contexto requiere cambios para muchos docentes, relacionados con sus creencias, actitudes y conocimientos profesionales (Swars *et al.*, 2009). Por eso:

> Estos cambios deben comenzar durante los programas de formación docente en los contextos de los cursos de contenidos matemáticos, de metodologías de enseñanza y de las experiencias de campo en las escuelas. En consecuencia, los cambios en las creencias, actitudes y conocimientos en estos contextos deben identificarse, comprenderse plenamente, enfatizarse adecuadamente y medirse rutinariamente en todos los cursos como resultados importantes de los programas de formación docente (Swars *et. al*., 2009, p. 48, nuestra traducción).

Es desde la formación inicial de profesores de Matemática que debe trazarse la ruta para provocar que estos cambios sucedan. Reconocida como un proceso de aprender a enseñar (Llinares, 1998), la formación inicial de profesores es un proceso influenciado por varios factores, entre los cuales, se destacan cuatro principales: (i) los *conocimientos profesionales* que los futuros docentes desarrollan en su programa de formación; (ii) los *procesos de reflexión* sobre su futuro ejercicio profesional y las diferentes tareas que desempeñan; (iii) las *concepciones y creencias* que los futuros docentes tienen sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; y (iv) el *contexto* de su futura práctica profesional (Llinares, 1998; Ponte; Chapman, 2008; Swars *et al.*, 2009).

En la Educación Matemática, es bien discutido y argumentado que el *conocimiento profesional* del docente es un conocimiento práctico, complejo, integrador, crítico y profesionalizado (Gómez; Rico, 2004; Ponte, 2012; Ponte; Chapman, 2008). En cuanto a su naturaleza, el conocimiento profesional del profesor de Matemática es un *conocimiento teórico-práctico*, que se desarrolla desde la exploración y movilización teórica hacia la experiencia en la práctica, es decir, el docente tiene la necesidad de analizar el conocimiento teórico ante la singularidad de las situaciones que ocurren en su práctica profesional, destacando que este análisis implica un *proceso de reflexión* por parte del docente sobre su acción, permitiéndole así construir conocimiento sobre la práctica. Al respecto, Ponte (2012) considera que

> El conocimiento profesional del profesor de Matemáticas incluye varios aspectos, de los cuales nos interesa especialmente la práctica docente, aquella en la que se siente con mayor fuerza la especificidad de la disciplina Matemática, y que llamamos conocimiento didáctico (Ponte, 2012, p. 86-87, nuestra traducción).

Para Gómez y Rico (2004), el conocimiento didáctico "es el conocimiento necesario para organizar las actividades de enseñanza y aprendizaje" (p. 4, nuestra traducción). Estos autores identifican tres dominios que integran el conocimiento didáctico: (i) conocimiento sobre el currículo como herramienta global de planificación y estructuración; (ii) conocimiento sobre los fundamentos de la Matemática escolar (Matemáticas, aprendizaje, enseñanza y evaluación); y (iii) conocimiento sobre Educación Matemática, es decir, conocimiento sobre herramientas conceptuales y metodológicas para la planificación de clases. Semejantemente, Ponte (2012) define el conocimiento didáctico de las Matemáticas a partir de cuatro principales dominios: (i) conocimiento de las Matemáticas, (ii) conocimiento del currículo, (iii) conocimiento del estudiante y sus procesos de aprendizaje, y (iv) conocimiento de los procesos de trabajo en el aula (conocimiento de la práctica docente). La posición de estos autores coincide con la conceptualización que hace Azcárate (2004) al caracterizar el conocimiento profesional del profesor como complejo e integrador.

Con respecto al *contexto* de la futura práctica profesional docente, por un lado, se debe considerar que “en la formación docente no basta pensar en lo que se debe enseñar, también es necesario considerar cómo enseñar” (Serrazina, 2012, p. 267-268, nuestra traducción). De esta manera, la formación inicial debería “brindar a los futuros docentes oportunidades que les permitan comprender, apreciar y abrazar la complejidad de su práctica como base para una formación continua” (Ponte; Chapman, 2008, p. 256, nuestra traducción).

Por otro lado, este contexto presenta nuevas demandas relacionadas con el avance de la tecnología en el siglo XXI y de acuerdo con los lineamientos curriculares, la Educación Matemática debe priorizar por promover una enseñanza y aprendizaje de la Matemática con tecnología (AMTE, 2017; NCTM, 2014). Así, se han agregado nuevas preguntas con relación al conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, por ejemplo: ¿Cómo desarrolla el docente sus conocimientos tecnológicos?; ¿Cómo articula el docente el conocimiento tecnológico con el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico-matemático? (Koehler *et al.*, 2014).

Dentro de este escenario, al integrar la tecnología emergen nuevos dominios del conocimiento profesional producto de articular el conocimiento didáctico-matemático con el conocimiento tecnológico, dando lugar a modelos como el TPACK[2] (Gutierrez-Fallas; Henriques, 2021; Koehler *et al.*, 2014). El modelo TPACK es un *framework* dinámico y flexible que es adecuado para definir y caracterizar el tipo de conocimiento que un docente necesita desarrollar para integrar efectivamente la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas. Según Mishra y Koehler (2006), el TPACK se define como un conocimiento integrador que resulta de la articulación simultánea de contenido, pedagogía y tecnología, en la que el profesor debe evidenciar.

Para ello, es necesario que los programas de formación orienten a los futuros profesores en el aprendizaje de las nuevas tecnologías y su uso eficiente en las propuestas de enseñanza de contenidos matemáticos. Este aprendizaje formativo es un proceso para adquirir conocimientos tecnológicos y articularlos con conocimientos didácticos considerando cómo estas tecnologías pueden incidir en las estrategias de enseñanza, en el propio currículo escolar y en la forma en que los estudiantes exploran y aprenden los contenidos matemáticos (Niess, 2012)

[2] *Technological Pedagogical Content Knowledge*

Tareas matemáticas con integración de la tecnología

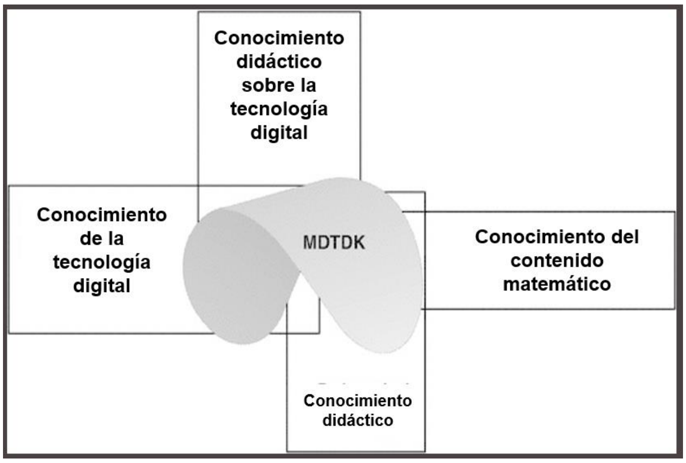
Las tareas matemáticas son las propuestas de acción que los profesores plantean a sus estudiantes para promover el aprendizaje de los contenidos matemáticos, esto es, una tarea matemática condiciona lo que los estudiantes harán con esa tarea y delimita lo que pueden llegar a aprender (Penalva; Llinares, 2011). El propósito de una tarea matemática escolar es su resolución, al respecto se define actividad "al conjunto formado por la tarea y el sistema de actividades cognitivas individuales y/o sociales desarrolladas por el resolutor" (Penalva; Llinares, 2011, p. 28, nuestra traducción).

La tarea matemática permite establecer un vínculo entre la enseñanza y el aprendizaje. Este vínculo es orientado desde la enseñanza cuando el profesor define los propósitos y objetivos que se pretenden alcanzar, tomando en cuenta el currículo al cual responde, el contexto y la población estudiantil a la que se dirige, el tipo de tarea y el nivel de cognitivo de la misma (Ponte, 2005). En cuanto al aprendizaje, la tarea matemática debe "permitir a los estudiantes pensar sobre las situaciones matemáticas, más que recordar recetas que deberán seguir" (Penalva; Llinares, 2011, p. 30, nuestra traducción).

Según Ponte (2005), las tareas son la base de la actividad matemática que un estudiante puede desarrollar durante su resolución, el autor define cuatro tipos de tareas según su grado de desafío y su grado de estructura: ejercicios, problemas, investigaciones y exploraciones. Las tareas de desafío reducido (demanda cognitiva baja) son los ejercicios y las exploraciones, mientras que el *ejercicio* es aquella tarea de rutina, que se resuelve con una estrategia procedimental inmediata y que se llega a una sola respuesta correcta; la *exploración* es una tarea abierta, en donde existe cierta indeterminación de lo que es dado o lo que es pedido en el enunciado, y la resolución de una exploración admite diversas respuestas válidas. Las tareas de desafío elevado (demanda cognitiva alta) son los problemas y las investigaciones, para Ponte (2005) la resolución de un *problema* implica la adaptación de alguna estrategia o la aplicación de un conjunto de procedimientos para llegar a una respuesta válida, promueve la conexión de conceptos matemáticos dentro de un contexto real o ficticio asociado a un fenómeno de la vida cotidiana o social; en cambio, una *investigación* es una tarea abierta que puede ser construida en conjunto con los estudiantes, atribuyéndoles un mayor grado de responsabilidad en la formulación de las estrategias para realizar la investigación.

Ahora bien, en un contexto donde se integran herramientas tecnológicas en el diseño y la resolución de las tareas matemáticas, es necesario contemplar algunos elementos. Leung (2017) analiza la integración de la tecnología en las tareas utilizadas en el aula de Matemáticas y define el *Diseño de Tareas Tecnopedagógicas* como el diseño de tareas para "procesos pedagógicos en los que los estudiantes reciben habilidades ampliadas para explorar, reconstruir (o reinventar)) y explicar conceptos matemáticos utilizando herramientas integradas en un entorno rico en tecnología" (Leung, 2017, p. 327, nuestra traducción). Este autor adapta el modelo TPACK (Mishra; Koehler, 2006) y describe un tipo de conocimiento denominado *Conocimiento para el Diseño de Tareas Matemáticas Digitales* (*Mathematics Digital Task Design Knowledge* – MDTDK) que surge de la intersección de cuatro conocimientos: (i) el conocimiento de contenidos matemáticos; (ii) el conocimiento de la herramienta tecnológica; (iii) el conocimiento didáctico de la Matemática; y (iv) el conocimiento didáctico de la herramienta tecnológica (Figura 1).

Figura 1 – *Conocimiento para el Diseño de Tareas Matemáticas Digitales*



Fuente: (Leung, 2017, p. 7)

El autor añade además que el "MDTDK es flexible en el sentido de que no debe ser una estructura de conocimiento rígida y es susceptible de cambiar a medida que evolucionan las interacciones entre los cuatro dominios de conocimiento" (Leung, 2017, p. 6, nuestra traducción). Por ejemplo, en el estudio de Gutiérrez-Fallas y Henriques (2018) se operacionalizó este *framework* con futuros profesores de matemática, los resultados evidenciaron que los futuros profesores movilizan el *conocimiento didáctico de la herramienta tecnológica* en el diseño de las tareas, concibiendo la tecnología desde una perspectiva didáctica, principalmente como un recurso motivador, dinámico e innovador; además, los futuros docentes reconocen no sólo las potencialidades del recurso tecnológico, sino también la forma en que estas potencialidades asociadas a una intención didáctica contribuyen a la exploración del contenido matemático y al desarrollo del aprendizaje del estudiante en la resolución de la tarea. También fue evidenciado la articulación del *conocimiento de la herramienta tecnológica* con el *conocimiento didáctico de la Matemática*, en la medida de que los futuros profesores identificaron las opciones que ofrecía la herramienta tecnológica y orientaron su uso para el desarrollo del razonamiento matemático, el trabajo independiente y colaborativo entre pares.

Fenomenología didáctica

Hans Freudenthal (1983) argumentó que las matemáticas son un instrumento cognitivo y un conocimiento público para organizar, estructurar y matematizar partes de la realidad. Para este autor, es mediante este organizar, estructurar y matematizar que cada individuo se apropia personalmente de las matemáticas; por tanto, defiende que es desde la enseñanza que se deben buscar aquellos fenómenos del entorno de los estudiantes que se asocien con las matemáticas que están aprendiendo.

Freudenthal (1983) distingue cuatro tipos de fenomenología: (i) *fenomenología pura*, se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado en el momento actual y considerando su uso actual; (ii) *fenomenología didáctica*, intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza y aprendizaje; (iii) *fenomenología genética*, los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices; y (iv) *fenomenología histórica*, se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos.

Estas ideas fueron constituyendo la base de varios estudios (Gómez; Cañadas, 2011; Gutiérrez-Fallas, 2023) permitiendo que cada vez más sean considerados los aportes de la fenomenología didáctica dentro de los currículos escolares. Por ejemplo, el currículo escolar en Matemática se puede visualizar desde cuatro enfoques (Rico; Lupiañez, 2008): enfoque instrumental o tecnológico, enfoque estructural o técnico, enfoque funcional y enfoque integrado. En este texto haré referencia al enfoque funcional, como el enfoque curricular que se ajusta a las consideraciones de la fenomenología didáctica, ya que el enfoque funcional promueve una enseñanza contextualizada en situaciones reales y la resolución de tareas tipo problema constituye un elemento principal en este enfoque.

Pruebas estandarizadas a nivel internacional, como PISA (OECD, 2010), fomentan el uso de este enfoque para la enseñanza de la Matemática, donde el estudiante sea capaz de utilizar el conocimiento matemático para solucionar problemas en diferentes situaciones. Específicamente, se argumenta que se debe desarrollar en el estudiante:

> una capacidad para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (OCDE, 2006, p. 4, nuestra traducción).

Para responder a estas orientaciones, Gómez y Cañadas (2011) proponen un proceso a desarrollar en la formación inicial de profesores de Matemática llamado Análisis Fenomenológico, el cual consiste en la descripción de los fenómenos que organizan la matemática escolar y se relacionan con el concepto o estructura matemática correspondiente. Este análisis "comienza por delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquellas en las que éstos muestran su funcionalidad" (Lupiañez, 2009, p. 48, nuestra traducción).

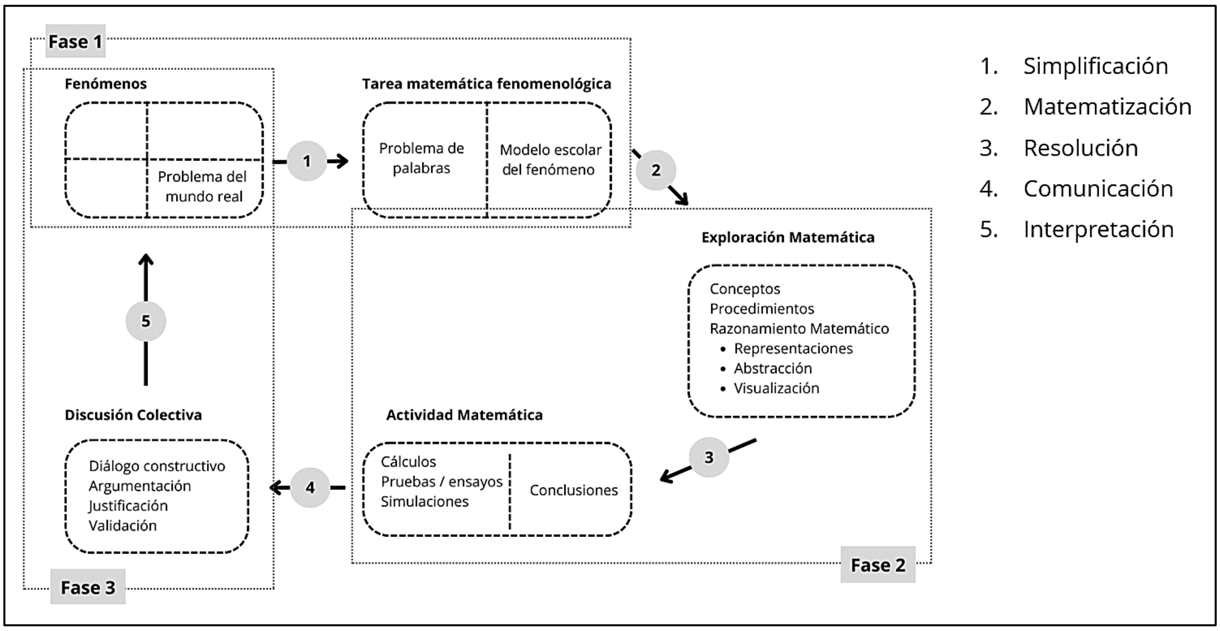
Cañadas y Gómez (2013, p. 34) presentan una serie de preguntas a las que debe responder el Análisis Fenomenológico, entre ellas están: ¿Qué fenómenos dan sentido a este contenido matemático? ¿Para qué se utiliza este contenido matemático? ¿A qué problemas da respuesta? ¿Qué características comparten los fenómenos que dan sentido a este contenido?

Para realizar un Análisis Fenomenológico, Gómez y Cañadas (2011) proponen que el futuro profesor de Matemática: indague los posibles fenómenos reales asociados al contenido, agrupe los fenómenos en contextos de acuerdo con sus características estructurales relevantes desde el punto de vista matemático, diseñe tareas mediante la simplificación del fenómeno a un problema de palabras que pueda ser presentado a los estudiantes, gestione la implementación de la tarea en el aula y discuta con los estudiantes los resultados obtenidos al resolver la tarea. Este proceso es llamado como *Ciclo del análisis fenomenológico desde la perspectiva escolar* (Gómez; Cañadas, 2011, p. 80).

Basado en este modelo, durante tres años se ha venido movilizando las etapas de este ciclo en la formación de futuros profesores de Matemática en cuanto al diseño de tareas para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones (Gutiérrez-Fallas, 2023). Con esta experiencia se ha realizado una adaptación al ciclo (Figura 2) y, además, se proponen cinco principios que orientan el diseño y conceptualizan las tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología.

El *Ciclo Fenomenológico Escolar* (CFE) está conformado por tres fases. La *Fase 1 – Simplificación*, consiste en dos momentos en los cuáles el profesor es el responsable, un primer momento se trata de la indagación de fenómenos que problematicen situaciones del mundo real asociados con el contenido matemático que debe enseñar y un segundo momento donde el profesor simplifica ese fenómeno y diseña una tarea matemática fenomenológica proponiendo un modelo escolar del fenómeno. La *Fase 2 – Matematización y Resolución*, consiste en la exploración matemática de la tarea por parte del estudiante, movilizando su razonamiento matemático y utilizando los conocimientos conceptuales-procedimentales que tiene para matematizar la situación, esto da pie a la resolución de la tarea y así desarrollar su actividad matemática, permitiéndole obtener las conclusiones y resultados matemáticos correspondientes. La *Fase 3 – Comunicación e Interpretación*, se compone de un momento de discusión colectiva, donde el profesor dirige un diálogo constructivo invitando a los estudiantes a argumentar y justificar sus resultados, de modo que permita finalmente validar las conclusiones a la luz de la interpretación del fenómeno que dio origen al problema planteado en la tarea.

Figura 2 – Ciclo fenomenológico escolar



Fuente: Elaboración del autor

Con respecto a los principios de diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de tecnología presento los siguientes cinco principios orientadores para que un profesor (o futuro profesor) de Matemática elabore una tarea conforme al *CFE*.

- **P1.** La tarea está vinculada a un fenómeno real.
- **P2.** El modelo escolar del fenómeno es adecuado al nivel curricular al que se dirige la tarea.
- **P3.** La herramienta tecnológica potencializa la exploración y la actividad matemática para la visualización de los contenidos matemáticos en el desarrollo del razonamiento matemático.
- **P4.** La herramienta tecnológica promueve el trabajo autónomo y motiva la colaboración de los estudiantes.
- **P5.** Lo solicitado por la tarea apela a la argumentación y justificación de resultados, así como la interpretación de esos resultados en coherencia con el fenómeno real.

Metodología

El estudio del que se deriva este artículo se ubica en el paradigma interpretativo con enfoque cualitativo, realizado en un contexto de formación inicial de profesores de Matemáticas, en el cual, el autor del texto fue el investigador y el docente formador del programa.

El paradigma interpretativo valora la comprensión de significados buscando penetrar en el mundo personal de los sujetos, dentro de un contexto en el que se produce la interacción entre el investigador y el investigado (doble hermenéutica) y donde la producción de conocimiento es de carácter inductivo, proceso interactivo y en espiral (Coutinho, 2011). De acuerdo con el objetivo del estudio y la naturaleza del contexto en donde se recolectaron los datos, fue necesario que como investigador interprete, aclare y describa los datos recolectados en función de los participantes involucrados. Mientras que, como formador, fue fundamental formar parte del entorno donde se producen y recogen estos datos: un curso de formación inicial de profesores de Matemática.

El estudio se desarrolló por un periodo de tres años (2020, 2021, 2022) y la experiencia tuvo lugar en un curso de un programa de formación inicial de profesores de Matemáticas de una universidad de Costa Rica. Este curso es de tercer año del programa, es de naturaleza didáctico-matemático y dentro de sus objetivos de formación están el desarrollar conocimiento didáctico sobre el tema de Funciones para secundaria, en particular, uno de los contenidos del curso es la fenomenología didáctica del tema de Funciones dentro del currículo escolar de Costa Rica. Para el desarrollo de este contenido, fue solicitado a los futuros profesores realizar un análisis fenomenológico de un contenido matemático asociado al tema de Funciones y diseñar tareas matemáticas fenomenológicas para la enseñanza y el aprendizaje de ese contenido, integrando herramientas tecnológicas tanto para el diseño como para la resolución de las tareas.

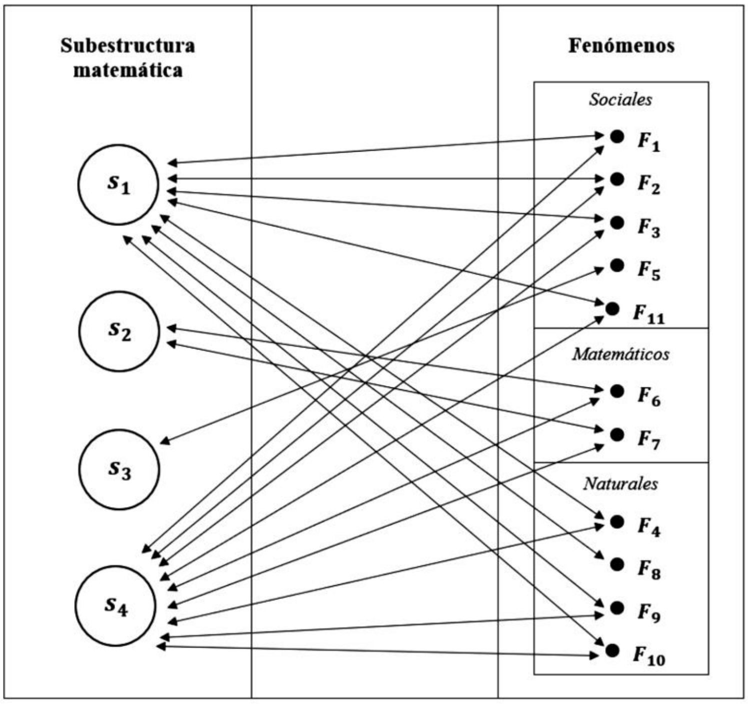
La recolección de datos se realizó desde las producciones de los futuros profesores, en este caso estas producciones consistieron en las tareas que diseñaron y, además, se recolectaron evidencias a partir de sus reflexiones escritas sobre el trabajo realizado. El análisis de los datos se realizó de forma descriptiva e interpretativa, con el propósito de evidenciar la operacionalización de los cinco principios de diseño en las tareas elaboradas por los futuros profesores dentro del modelo del CFE. Para fines de este artículo, se presenta el análisis de dos de las tareas elaboradas por una pareja de futuros profesores que trabajaron de forma colaborativa en el diseño de éstas. Para garantizar el anonimato, se atribuyen nombres ficticios a los futuros profesores, referidos como José y Ana.

El el objetivo de los resultados presentados en este texto es evidenciar los elementos movilizados por José y Ana en el diseño de tareas matemáticas fenomenológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Función Lineal, por lo que no se presentan elementos asociados con la implementación de estas tareas en el aula escolar. Para alcanzar este objetivo, las dos tareas diseñadas por los futuros profesores fueron analizadas desde la definición de los cinco principios mencionados en la sección anterior.

Principales resultados

Previo al diseño de las tareas matemáticas fenomenológicas, José y Ana realizaron un análisis fenomenológico del tema Función Lineal. En dicho análisis, definieron cuatro subestructuras matemáticas de este tema, reconocieron once fenómenos reales, organizaron los fenómenos en tres contextos: sociales, matemáticos y naturales, y establecieron la relación de estos fenómenos con cada una de las subestructuras (Figura 3).

Figura 3 – Esquema del Análisis Fenomenológico de la Función Lineal



Fuente: Elaborado por José y Ana

Las cuatro subestructuras que definieron son: S1. Función lineal cuya representación gráfica no contiene al origen; S2. Función lineal cuya representación gráfica contiene al origen; S3. Función lineal constante; y S4. Ecuación Lineal. Los once fenómenos se enuncian a continuación:

- F1. La relación entre costo y cantidad de la producción de un producto.
- F2. La relación entre salario y cantidad de productos vendidos.
- F3. La relación entre tiempo y cantidad.
- F4. La relación de la frecuencia cardíaca de un animal y su temperatura corporal.
- F5. La relación entre un salario fijo y cantidad de productos vendidos.
- F6. La relación entre el perímetro y la medida del lado de polígonos regulares.
- F7. La relación entre la longitud de la circunferencia y la medida de su radio.
- F8. La relación entre las diferentes unidades de medida de temperatura.
- F9. La relación entre la medida de los huesos y la estatura de hombres y mujeres.
- F10. La relación de la longitud de una parte del cuerpo de un animal y su totalidad.
- F11. La relación entre el precio y la oferta o la demanda de un producto.

Posteriormente, José y Ana diseñaron cinco tareas matemáticas fenomenológicas, en las que utilizaron tres principales herramientas tecnológicas para su diseño: el sitio web *wix.com*, la plataforma *genial.ly* y el software *GeoGebra*. A continuación, se presentan los resultados del análisis del diseño de dos de las tareas elaboradas por José y Ana, T1 y T2, dichos resultados se organizan a partir de los cinco principios de diseño propuestos anteriormente en este texto.

P1. *La tarea está vinculada a un fenómeno real.*

Con respecto a la T1, corresponde al modelo lineal que relaciona la edad de una persona con su frecuencia cardiaca, en este caso, la función con criterio $f(x) = 220 - x$, donde x representa la edad en años de la persona y $f(x)$ la frecuencia cardíaca máxima en latidos por minuto (lpm). Mientras que la T2, es una tarea asociada a un fenómeno de ingeniería aeronáutica, específicamente, a la relación lineal que se puede establecer entre el tiempo de vuelo de una aeronave Boeing 727 y el consumo de combustible, tomando como referencia que un Boeing 727 usa aproximadamente 4 850 litros de combustible por cada hora de vuelo.

En ambas tareas (Figura 4) se evidencia un proceso significativo de indagación de los fenómenos reales que pueden ser modelados por el criterio de una función lineal. Para José y Ana, esta búsqueda "proporciona al docente una serie de ideas que le permiten crear tareas que potencien no solo el interés de los alumnos en esta disciplina, sino también la aplicación de conocimientos y el surgimiento de estos en el mundo que los rodea" (R-e[3]).

De modo que se evidencia un acercamiento a los fenómenos del mundo real, la comprensión de ese fenómeno y los elementos necesarios para diseñar una tarea matemática fenomenológica que permita la exploración del contenido matemático correspondiente, en este caso, explorar la Función Lineal.

Figura 4 – Propuesta de las tareas T1 y T2 en *genial.ly*

Fuente: Elaborado por José y Ana.

P2. *El modelo escolar del fenómeno es adecuado al nivel curricular al que se dirige la tarea.*

Ambas tareas están dirigidas para el nivel de secundaria del sistema educativo costarricense, con el objetivo de reconocer la relación lineal entre dos variables, las distintas

[3] Se utilizará la simbología **R-e** para hacer referencia a la **R**eflexión-**e**scrita de José y Ana sobre el diseño de las tareas.

representaciones que permiten modelar esa relación y las características principales de la Función Lineal.

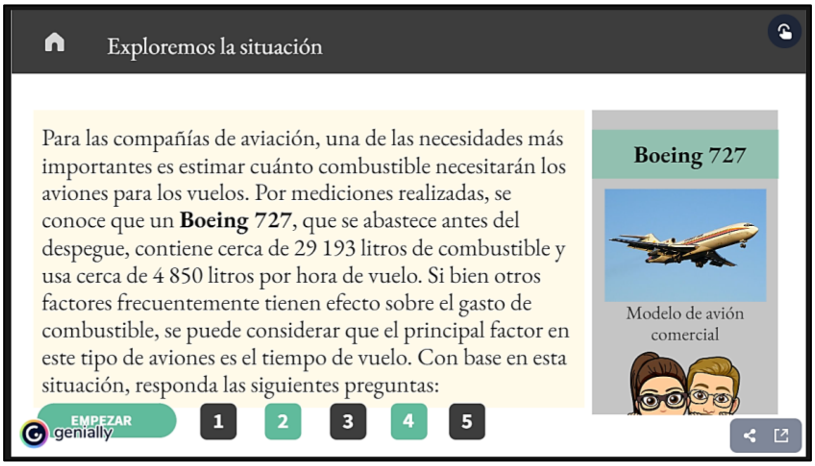
En la T1 (Figura 5) José y Ana redactan un problema de palabras en donde combinan la representación textual con la representación simbólico-algebraica para definir el modelo escolar del fenómeno, situado en el contexto de la actividad física que puede realizar una persona para el beneficio de su salud. Este enunciado es bastante cercano a la realidad inmediata de muchos de los estudiantes adolescentes que practican algún deporte o realizan algún desempeño físico en su día a día. Además, evidencia la proximidad con un currículo que promueve la salud física de las personas.

Figura 5 – Enunciado de la T1

Fuente: Elaborado por José y Ana.

Con respecto a la T2 (Figura 6), el enunciado redactado por José y Ana muestra solamente el uso de representación textual alfanumérica para establecer el modelo escolar del fenómeno en el que se desarrollará la tarea. En este caso, tomando en cuenta que, aunque muchos estudiantes nunca hayan viajado en avión, es comúnmente reconocido la curiosidad que provoca el pensar en tal posibilidad, por lo que esta tarea apela al interés que puede generar en los estudiantes. Al respecto, José y Ana reflexionan que “el diseño de tareas matemáticas permitió comprender de una mejor manera cómo abordar este tema por medio de situaciones o problemas con un contexto particular, para impartir de manera correcta el tema de función lineal” (R-e).

Figura 6 – Enunciado de la T2



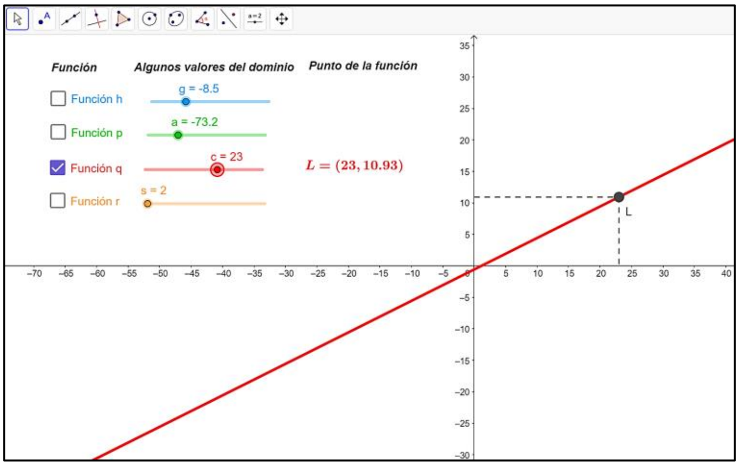
Fuente: Elaborado por José y Ana.

P3. *La herramienta tecnológica potencializa la exploración y la actividad matemática para la visualización de los contenidos matemáticos en el desarrollo del razonamiento matemático.*

José y Ana utilizaron dos principales herramientas para promover la exploración y la actividad matemática, por un lado, utilizaron *genial.ly* para crear la secuencia dinámica de la tarea y las cuestiones asociadas con la misma, por ejemplo, en la Figura 5 y en la Figura 6 se pueden ver los distintos botones de navegación representados por números que orientan la exploración de la tarea a lo largo de su resolución.

Por otro lado, utilizaron GeoGebra (Figura 7) con el propósito de consolidar los resultados obtenidos durante la actividad matemática de la tarea en cuanto a las características de la Función Lineal, permitiendo visualizar los diferentes elementos del contenido matemático en un ambiente dinámico que ofrece el software.

Figura 7 – Ejemplo del uso del recurso de GeoGebra en T1



Fuente: Elaborado por José y Ana.

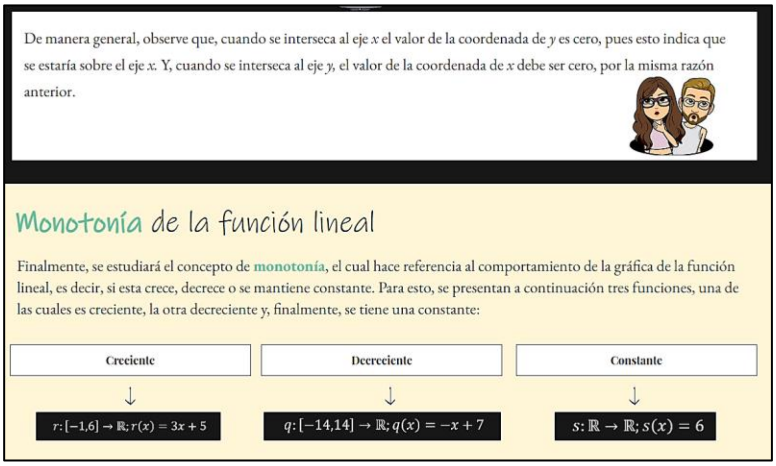
La integración de estas herramientas tecnológicas por parte de José y Ana evidencian el reconocimiento de que estos recursos potencializan la enseñanza de contenidos matemáticos y traen beneficios significativos en cuanto a la motivación y el aprendizaje de los estudiantes. Para los futuros profesores, resulta relevante que "cada vez sean mayores las herramientas con las que los profesores de matemática cuentan para el desarrollo de lecciones provechosas y que favorezcan el aprendizaje de los alumnos" (R-e).

P4. La herramienta tecnológica promueve el trabajo autónomo y motiva la colaboración de los estudiantes.

De acuerdo con sus reflexiones, José y Ana afirman que el proceso que conlleva el diseño de tareas también les permitió reconocer como llevarlas a una clase con la intención de mejorar la comprensión de los contenidos matemáticos, argumentando que "por medio de asignaciones como el diseño de tareas matemáticas, es posible conocer cómo utilizarlas en una clase, la gran cantidad de conceptos que se encuentran inmersos en estas, lo cual permite desarrollar una mejor comprensión sobre el tema matemático tratado" (R-e).

Parte de esto consiste en promover el trabajo autónomo de los estudiantes durante la resolución de la tarea, para lo cual, los futuros profesores utilizaron el sitio web *wix.com* para alojar un ambiente virtual de aprendizaje que oriente de forma independiente al estudiante (Figura 8). Este sitio web presenta instrucciones muy bien detalladas, invitando al estudiante a navegar por distintas opciones asociadas con las tareas, su resolución y los resultados matemáticos que se van descubriendo a medida que las tareas son resueltas.

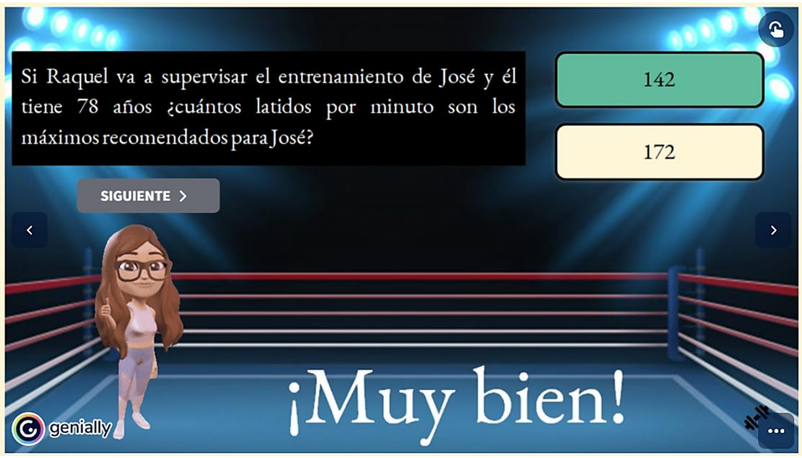
Figura 7 – Ejemplo del uso de *wix.com*



Fuente: Elaborado por José y Ana.

Además, José y Ana integraron elementos que mantuvieran la motivación por realizar la tarea y trabajar de forma colaborativa con sus pares. Por ejemplo (Figura 9), hicieron uso de la plataforma *genial.ly* para introducir elementos icónicos animados que permitiera establecer un vínculo con la herramienta tecnológica durante la resolución de la tarea.

Figura 9 – Ejemplo de interacción con la herramienta tecnológica en T1



Fuente: Elaborado por José y Ana.

P5. *Lo solicitado por la tarea apela a la argumentación y justificación de resultados, así como la interpretación de esos resultados en coherencia con el fenómeno real.*

Las cuestiones por resolver en la tarea son el motor de la exploración y la actividad matemática del estudiante. La riqueza de estas cuestiones se evidencia a medida que se promueve la argumentación, justificación e interpretación de los resultados que se obtienen. Las tareas diseñadas por José y Ana evidencian un potencial muy significativo para que los estudiantes establezcan argumentos sólidos basados en su conocimiento matemático, justifiquen sus respuestas tomando como referencia los procedimientos desarrollados y al mismo tiempo, interpreten sus respuestas a la luz del fenómeno al que hace referencia la tarea.

Por ejemplo, en la Figura 10 se observa una cuestión en la cual los estudiantes no solamente deben realizar el cálculo respectivo del combustible necesario para realizar un vuelo de 7 horas, sino que también debe interpretar ese valor dentro del contexto definido por el modelo escolar del fenómeno que se presentó con la tarea. Además, José y Ana reconocen el aporte que trae a su formación el promover tareas de esta naturaleza, reflexionando que:

> Es posible afirmar que, gracias al diseño de propuestas didácticas para la función lineal, fue posible crecer sustancialmente como profesionales, generando nuevos conocimientos y aprendizaje valiosos que sin duda alguna mejorarán la Educación Matemática en Costa Rica (R-e).

Figura 10 – Ejemplo de interacción con la herramienta tecnológica en T1

Fuente: Elaborado por José y Ana

Conclusiones

Tal como se evidencia en currículos escolares, por ejemplo, el currículo costarricense, la fenomenología didáctica se posiciona como una pieza fundamental para promover el enfoque funcional de las matemáticas. Por tanto, integrada en la formación inicial de profesores de Matemática, la fenomenología didáctica desarrolla capacidades y competencias profesionales asociadas con el análisis, la indagación y sistematización de información, el pensamiento crítico, la creatividad y la innovación educativa.

Esto se potencializa cuando la fenomenología didáctica toma lugar en los programas de formación de profesores como una herramienta eficaz y eficiente para que el docente pueda reconocer fenómenos que dan respuesta a los contenidos matemáticos que debe enseñar y diseñar las tareas matemáticas escolares dentro de esos contextos fenomenológicos.

Los resultados aquí presentados muestran que el diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología constituye una experiencia que le permite a los futuros profesores consolidar sus conocimientos didáctico-matemáticos y visualizar los conceptos matemáticos de forma dinámica a medida que se exploran contextos de aplicación de esos conceptos. Según los resultados, estas experiencias formativas también se ven enriquecidas por las concepciones que tienen los futuros profesores sobre las potencialidades que ofrece la tecnología a la comprensión de los contenidos matemáticos cuando se resuelven tareas.

Por otro lado, se evidenció una articulación significativa entre los distintos dominios sobre el *Conocimiento para el Diseño de Tareas Matemáticas Digitales*, particularmente los resultados mostraron que José y Ana no sólo movilizaron su conocimiento técnico de las herramientas digitales que utilizaron para diseñar las tareas, sino que también el conocimiento didáctico de la herramienta, que les permitió a los futuros profesores crear un ambiente propicio para el aprendizaje de la Función Lineal.

Se concluye que el CFE constituye una ruta para el diseño y la implementación de tareas matemáticas fenomenológicas. Sin embargo, esta ruta puede presentar algunos obstáculos, por ejemplo se consideran tres: (i) el tiempo que disponemos en los cursos de formación inicial de profesores *versus* la cantidad de numerosas temáticas por abordar, (ii) las concepciones y creencias de los futuros profesores en cuanto al enfoque funcional de las Matemáticas, y (iii) la distancia que existe hacia otras áreas científicas, sociales o cotidianas que puede dificultar la comprensión de fenómenos reales en contextos poco conocidos por futuros profesores de Matemática.

No obstante, los programas de formación inicial deben continuar problematizando situaciones de enseñanza y aprendizaje, ofreciendo oportunidades para que los futuros profesores de Matemática movilicen de forma articulada sus conocimientos profesionales, particularmente, en el diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de tecnología permitiendo la movilización de su conocimiento matemático, didáctico-matemático y tecnológico.

REFERENCIAS

ASSOCIATION OF MATHEMATICS TEACHER EDUCATORS (AMTE). **AMTE technology position statement**: preparing teacher to use technology to enhance the learning of mathematics. Homepage. Raleigh, NC, 2006.

CAÑADAS, M.; GÓMEZ, P. **Apuntes sobre análisis de contenido**. Módulo 2 de MAD. Bogotá: Universidad de los Andes, 2013.

COUTINHO, C. **Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas, teoria e prática**. Coimbra: Edições Almedina. 2011.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht: Reidel, 1983.

GÓMEZ, P.; CAÑADAS, M. C. La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. **Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación**, *[S. l.]*, v. 2, n. especial, p. 78–89, 2011. DOI: 10.18175/vys2.especial.2011.05.

GÓMEZ, P.; RICO, L. Integration of didactical knowledge and mathematical content knowledge in pre-service teacher training. *In*: **ICME**, 10., 2004. **Anais** […]. Copenhague, Dinamarca, 2004.

GUTIÉRREZ-FALLAS, L. F. Taller: Diseño de tareas matemáticas fenomenológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las Funciones. *In*: CIAEM, 16., 2023. **Anais** […]. Lima, Perú, 2023.

GUTIÉRREZ-FALLAS, L. F.; HENRIQUES, A. (2018). O TPACK de futuros professores na adaptação de tarefas matemáticas. *In*: A. PEDRO, J. PIEDADE, J. F. MATOS, N. DOROTEA; N. PEDRO (org.). **Atas do V Congresso Internacional das TIC na Educação**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2018. p. 553-565.

GUTIÉRREZ-FALLAS, L. F.; HENRIQUES, A. Princípios de design de uma experiência baseada no TPACK na formação inicial de professores de matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 29, n. 00, e021006, 2021. DOI: 10.20396/zet.v29i00.8661780.

HIEBERT, J., MORRIS, A. K.; GLASS, B. Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, [*S. l.*], v. 6, 2003, pp. 201-222.

KOEHLER, M.; MISHRA, P.; KERELUIK, K.; SHIN, T. S.; GRAHAM, C. The technological pedagogical content knowledge framework. *In*: SPECTOR, J.; MERRILL, M.; ELEN, J.; BISHOP, M. (org.). **Handbook of research on educational communications and technology**. New York, NY: Springer, 2014. p. 101-111.

LEUNG, A. Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. *In:* LEUNG, A.; BACCAGLINI-FRANK, A. (org.). **Digital technologies in designing mathematics education tasks**: potential and pitfalls. Cham: Springer, 2017. p. 3-16.

LLINARES, S. Aprender a enseñar Matemática en la enseñanza secundaria: Relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado**, [*S. l.*], v. 32, 1998. p. 117-127.

LUPIAÑEZ, J. **Espectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. 2009. Tesis (Doctoral) – Universidad de Granada, Granada, 2009.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for integrating technology in teachers' knowledge. **Teachers College Record**, [*S. l.*], v. 108, n. 6, p. 1017-1054, 2006

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles to actions: Ensuring mathematical success for all**. Reston, VA: NCTM, 2014.

NIESS, M. L. Rethinking pre-service mathematics teachers' preparation: technological, pedagogical and content knowledge (TPACK). *In*: POLLY, D.; MIMS, C.; PERSICHITTE, K. (org.). **Developing technology-rich, teacher education programs**: key issues. Hershey, PA: IGI Global, 2012. p. 316-336.

OCDE. **PISA 2006**. Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lecturas. Madrid: Ministerio de Educación, 2006.

PENALVA, M. C.; LLINARES, S. Tareas matemáticas en la educación secundaria. *In*: GOÑI, J. M. (ed.). **Didáctica de las matemáticas**. GRAO: Barcelona, 2011. p. 27-74.

PONTE, J. P. Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. *In*: PLANAS, N. (org**.). Educación matemáticas**: teoría, critica y prática. Barcelona: Graó, 2012. p. 83-98.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (APM). Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. *In*: ENGLISH, L. (org.). **Handbook of international research in mathematics education**. 2. ed. New York, EUA: Routledge, 2008. p. 225-263.

RICO, L.; LUPIÁÑEZ, J. L. **Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular**. Madrid: Alianza Editorial, 2008.

SERRAZINA, L. Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista Eletrônica de Educação***,* [*S. l.*], v. 6, n. 1, p. 266-283, 2012.

SIMON, M. The challenge of mathematics teacher education in the area of mathematics education reform. *In*: JAWORSKI, B.; WOOD, T. (org.), **International Handbook of Mathematics Teacher Education, The Mathematics Teacher Educator as a Developing professional**. Rotterdam, The Netherlands: Sense, 2008. v. 4, p. 17-29.

SWARS, S. L., SMITH, S. Z., SMITH, M. E.; HART, L. C. A longitudinal study of effects of a developmental teacher preparation program on elementary prospective teachers' mathematics beliefs. **Journal of Mathematics Teacher Education**, [*S. l.*], v. 12, p. 47–66, 2009.

Procesamiento y edición: Editora Iberoamericana de Educación - EIAE.
Corrección, formateo, normalización y traducción.