

ANÁLISE DE INVESTIMENTOS PELO MODELO DE MARKOWITZ: UMA BREVE REVISÃO DA LITERATURA E SUA APLICAÇÃO DIDÁTICA EM EXCEL

Alessandro Moura Costa ¹

Resumo: O presente estudo trata-se de uma revisão sistemática da literatura sobre a Teoria Moderna do Portfólio, formulada por Harry Max Markowitz em 1952 em seu artigo "Portfolio Selection", a qual visa à otimização de carteiras de ativos. A pesquisa baseou-se sob os aspectos: bibliográficos, de pesquisa documental e construção e aplicação didática da Diversificação de Ativos em Excel, com a utilização de dados hipotéticos (apenas para compreensão do modelo) para embasar a respectiva teoria de Markowitz. Foi dada ênfase aos conceitos inerentes a área de investimentos e na parte estatística, visando simplificar e tornar a leitura de fácil compreensão, mesmo para leitores leigos, servindo de base para que possam se aprofundar no tema. Como resultado foi possível observar o impacto que a contribuição de Markowitz trouxe para o desenvolvimento das teorias sobre mercados financeiros.

Palavras-chave: Análise de Investimentos; Markowitz; Otimização de Portfólio.
Classificação JEL: B26

Introdução

É notório que nas últimas décadas, os estudiosos vêm enfrentando desafios para melhor entender o mercado financeiro, principalmente no que se refere a risco e retorno de investimentos. Diante deste esforço, alguns vêm desenvolvendo ferramentas e instrumentos com o intuito de entender este mercado e, mais particularmente, o mercado de capitais (mercados de longo prazo e de ações de empresas), na busca de respostas para inúmeros questionamentos como: Qual o nível de risco associado a cada possível decisão? Qual é a compensação (retorno) de se optar por uma ou outra destas alternativas? Qual o perfil que o investidor possui? Como realizar a melhor diversificação para otimizar as operações?

Bem, foi por volta de 1900, que surgira a disciplina de finanças, desde então, diversos intelectuais contribuíram para o desenvolvimento de teorias sobre mercados financeiros, mas talvez a de maior impacto tenha sido o Modelo de Markowitz, em 1952, a qual serviu de marco para a Teoria Moderna do Portfólio.

Após refletir sobre estas questões, observa-se que tais questionamentos exigem dos analistas e dos investidores conhecimentos que definam, identifiquem, analisem e meçam o risco, decidindo desta forma qual é o retorno

¹ Faculdade Futura. Votuporanga - SP – Brasil. Especialista em Segurança do Trabalho e Gestão da Produção. amcsgrt@hotmail.com.

necessário para que determinada aplicação ou investimento seja compensatório.

Neste sentido, o presente estudo justifica-se uma vez que o tema é de suma importância e relevância para a exploração dos conceitos de risco e retorno, para isto, exploraremos os pontos básicos da teoria da seleção de carteiras, formulada por Markowitz, a qual serviu de marco para a Teoria Moderna do Portfólio, a fim de fornecer uma visão básica sobre investimentos.

Para tentar atingir o êxito dos objetivos idealizados neste trabalho, o presente artigo foi elaborado da seguinte forma, além desta introdução, o mesmo apresenta em sua segunda parte o referencial teórico acerca da Teoria Moderna do Portfólio ou Modelo de Markowitz com um breve histórico sobre a mesma e conceituações sobre investimento, como: Carteiras de Investimento, Ativos, Risco, Retorno, Diversificação e Perfil de Investidores, e sobre as próprias premissas e modelagem da Teoria de Markowitz, revisitando os conceitos de Modelagem Matemática, estabelecendo assim, a explicação da relevância de tal estudo, em uma perspectiva mais precisa, passando pelas técnicas estatísticas utilizadas, as quais embasaram o referido teórico em seu Modelo Matemático.

Na terceira parte, serão descritos os procedimentos metodológicos aplicados, assim como os procedimentos da construção de uma planilha didática em Excel representando a otimização por meio da diversificação entre dois ativos, e na quarta parte as considerações finais do estudo.

Revisão da Literatura

Resumidamente, ao revisar a literatura pode-se entender que o Modelo de Markowitz se baseia em três pilares: “1) retorno esperado para a carteira; 2) a proporção com que os ativos comporão a carteira; 3) a variância da carteira que representará o risco incorrido para a mesma” (Markowitz, 1952 *apud* Pereira; Henrique, 2016, p. 170).

Entretanto, de nada adianta referir-se a estes conceitos, a não ser que este texto seja dirigido a profissionais que trabalhem com investimentos ou docentes e/ou acadêmicos que dominem o assunto, com isto, e para que ele possa atingir os demais públicos, inclusive os que estão tendo seu primeiro contato com este modelo, faz-se necessário realizar uma breve conceituação de fatores básicos utilizados na própria modelagem utilizada por Markowitz.

Conceituações Básicas sobre Investimento

Carteiras de Investimento

Segundo Bodie *et al.* (2014 *apud* Sá Lima, 2016, p. 28):

Uma carteira nada mais é do que um conjunto de ativos investidos. Enquanto que investimento é o comprometimento de dinheiro ou outros recursos no presente, com a expectativa de colher benefícios no futuro. Uma carteira é formada por mais de um ativo, dessa forma, podem ser encontradas inúmeras composições de carteiras; cada uma com um certo retorno esperado e nível de risco diferente das demais.

Ativos

Segundo Dionízio (2016, p. 12) ativos “são definidos como recursos controlados pela entidade e que possuem expectativa de gerar benefícios econômicos futuros”. Já para Hendriksen e Van Breda (1999, p. 283), ativos são “benefícios econômicos futuros prováveis, obtidos ou controlados por uma entidade em consequência de transações ou eventos passados”.

Sobre o assunto, Ludícibus (2000, p. 130) destaca três aspectos a serem observados para a definição de um ativo:

[...] 1. o ativo deve ser considerado à luz de sua propriedade e/ou à luz de sua posse e controle; normalmente as duas condições virão juntas; 2. precisa estar incluído no ativo, em seu bojo, algum direito específico a benefícios futuros [...] ou, em sentido mais amplo, o elemento precisa apresentar uma potencialidade de serviços futuros (fluxos de caixa futuros) para a entidade; 3. o direito precisa ser exclusivo da entidade; [...].

Risco

O risco sempre esteve presente na história humana, passando por diversos períodos, e hoje em dia não é diferente, tanto que risco, para a maioria de nós refere-se a qual a probabilidade de perder em um jogo ou em qualquer atividade, como por exemplo, o risco de dirigir muito rápido e sofrer um acidente ou apostar em um cassino e pôr tudo a perder, ele:

[...] origina-se de nossa incapacidade de prever o futuro, indicando um grau de incerteza, que é bastante significativo para se tornar. Pois essa definição um tanto vaga ganhará maior consistência se forem mencionadas algumas características de risco. (Motta; Calôba, 2002, p. 246 *apud* Silva, 2016, p. 8).

Segundo Samanez (2012 *apud* Barroso, 2018, p. 16), há vários tipos de riscos que devem ser citados:

- Risco de mercado: está relacionado quanto à dúvida ao valor dos ativos que estão propícios a oscilações do mercado; - Risco de crédito: está relacionado a inadimplência advindas do devedor cumprir seus compromissos firmados em contratos; - Risco operacional: está relacionado a perdas devido por falhas humanas e sistemas computacionais; - Risco de liquidez: está relacionado com a rapidez de obter recursos em troca de ativos; - Risco do negócio: está relacionado a oscilação do faturamento e os custos fixos; - Risco financeiro: está relacionado quanto a empresa tem de dívidas para financiar seus ativos.

O certo é que todo o investimento carrega basicamente dois tipos distintos de risco: o risco sistemático e o risco não-sistemático.

O risco sistemático é a parte relevante do risco de um ativo que pode ser atribuída a fatores de mercado que afetam todas as

empresas e não pode ser eliminado através da diversificação. Ele também é conhecido como risco não-diversificável ou risco de mercado. O risco sistemático é o nível mínimo de risco que pode ser obtido em uma carteira através da diversificação de um grande número de ativos dentro de uma carteira, desta forma corresponde somente aos riscos que resultem do mercado em geral e das condições econômicas, e que conseqüentemente não podem ser eliminados. O risco não-sistemático, é a parte do risco de um ativo que pode ser atribuída a causas aleatórias, específicas a uma firma, o qual pode ser eliminado através da diversificação. Este risco também é conhecido como risco diversificável, risco residual ou risco específico da companhia (Wilk, 1999, p.12).

Retorno de Investimentos

Para Gitman (2001, p. 205 *apud* Ferreira, 2008, p. 34), retorno “é o total de ganhos ou perdas ocorrido através de um dado período de tempo”.

Retorno Esperado

Segundo Ferreira (2008, p.35):

Retornos esperados ou, também chamados de retornos normais, são as expectativas futuras de ganho em um ativo com risco, isto é, através dos quais os investidores esperam receber rendimentos em contrapartida a uma aplicação, dado o estado da economia.

E segundo Jordan *et al.* (2002, p. 288) é determinado da seguinte maneira:

$$E(R) = P_1 \cdot ER_1 + P_2 \cdot ER_2 + \dots + P_n \cdot ER_n \quad (1)$$

Onde:

E (R) = retorno esperado

P = probabilidade do estado da economia (recessão ou crescimento)

ER = taxa de retorno caso o estado ocorra

Retorno Inesperado

O Retorno inesperado é procedente de subsídios não previstos, isto é, “ao contrário do retorno esperado, onde os investidores têm esperança de receber ganhos pela aplicação, este acaba incerto e sem previsão de advir” (Ferreira, 2008, p. 35). Logo, pode-se concluir que o retorno esperado + retorno inesperado = retorno total.

Diversificação de Ativos

Segundo Barcellos (2010, p.16) o conceito de diversificação deve ser:

[...] entendido como o processo de distribuir investimentos em vários ativos [...] e para que a diversificação seja efetiva é necessário que os ativos de preferência não apresentem comportamento semelhante, ou seja, eles não podem ter seu preço determinado pelos mesmos fatores.

Investidores

Segundo Almeida Junior, (2009, p. 40), pode-se dizer que o investidor é “um agente econômico superavitário (doador de recursos) que realiza investimentos em ativos financeiros através de instituições financeiras das negociações”.

Perfil do Investidor

Segundo Nigro (2016 *apud* Altmann, 2017, p. 33), o perfil do investidor é “uma análise baseada na relação de risco, rentabilidade e retorno, e tem como objetivo identificar as características do investidor”. Afirma também que, através deste processo, é possível instruir o investimento mais adequado.

Perfil Conservador

Segundo Wiltgen (2016 *apud* Altmann, 2017, p. 33), o “investidor conservador preserva seus recursos, não tolerando perdas e possui aversão ao risco”.

Perfil Moderado

No perfil moderado, “o investidor prioriza a segurança nos investimentos, mas também está aberto a investir em produtos um pouco mais arriscados que possam gerar melhores retornos a médio e longo prazo” (Rambo, 2014, p. 19).

Perfil Agressivo ou Arrojado

O Investidor Agressivo ou Arrojado, diferentemente do Conservador e do Moderado, possui “um perfil que tem alta tolerância a riscos e baixa ou nenhuma intenção de liquidez no curto e médio prazo. Está disposto a aceitar as oscilações dos mercados de risco e possíveis perdas na busca do retorno diferenciado no longo prazo” (Rambo, 2014, p. 21).

Modelagem Matemática

Segundo D’Ambrosio (1986, p. 25 *apud* Viecili, 2006, p. 35):

A criação de Modelos Matemáticos vem ao encontro da necessidade de que se desenvolva uma técnica de acesso ao conhecimento e, tal conhecimento, acumulado e depositado, deverá ser acessível a vários níveis de necessidade. E que haja uma forma de ensino mais dinâmica, mais realista e menos formal, mesmo no ensino tradicional, permitindo atingir objetivos mais adequados a nossa realidade.

Portanto, pode-se dizer que a Modelagem Matemática surge a partir de problemas e de aspectos da realidade vivida pelos participantes do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, para chegar-se à construção de um modelo. Assim pode-se definir a Modelagem Matemática como “um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões” (Burak, 1992, p. 62).

Já para Biembengut e Hein (2000 *apud* Viecili, 2006, p. 33-34), “Modelagem Matemática é o processo de análise dos procedimentos envolvidos na formulação de um modelo matemático a partir de uma dada situação”. Esses autores enumeram as seguintes etapas:

- Reconhecimento da situação problema.
- Pesquisa.
- Proposta das hipóteses.
- Formalização matemática do modelo.
- Análise das possibilidades.

Conceitos Estatísticos Básicos utilizados por Markowitz para Determinação de Índices e Análise de Dados – Breves Considerações

Média Aritmética

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (2)$$

Onde “ \bar{X} representa a média, X_i representa o valor da observação i , e onde há n observações” (Rogerson, 2012, p. 28). Cabe ressaltar que a média de distribuição amostral das médias, denotada por $\mu(x)$, é igual à média populacional μ , isto é:

$$E = [\bar{X} = \mu(\bar{x}) = \mu] \quad (3)$$

Variância e Desvio Padrão

Segundo Assaf Neto (2008 *apud* Fonseca, 2011, p. 10-11):

As medidas de dispersão indicam como os valores de um conjunto distribuem-se (dispersam) em relação a seu ponto central (média). E a Variância e Desvio-padrão são dois exemplos de medidas de dispersão. A variância expressa o distanciamento dos valores observados em relação à média aritmética da amostra estudada. Quanto maior as variâncias, mais dispersos estão os dados.

Seja $\mu = E(X)$ o valor esperado (média) da variável X , então a variância é:

$$\sigma^2 = Var(X) = E((X) - \mu)^2$$

(4)

Ou seja, é o valor esperado do quadrado do desvio de X em relação à sua própria média.

É importante entender que a fórmula da variância de uma carteira objeto de estudo deste trabalho envolve “não só as variâncias individuais de cada ativo com a covariância entre esses. O cálculo pode ter um enfoque matricial o que facilita o cálculo para uma carteira com mais de dois ativos” (Ross *et al.*, 2008 *apud* Vargens, 2011, p. 13).

Figura 1 - Matriz de Variância da Carteira

	A	B
A	Peso A x Variância A	Peso B x Peso A x Covariância A,B
B	Peso B x Peso A x Covariância A,B	Peso B x Variância B

Fonte: Vargens (2011, p. 13).

Já o desvio padrão (σ) é a raiz quadrada da variância. É dado por:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (5)$$

Covariância e Correlação

A Covariância e Correlação são medidas que relacionam duas variáveis.

A covariância tem por objetivo identificar de que forma certos valores se inter-relacionam. É basicamente uma medida que avalia como as variáveis X e Y movimentam-se ao mesmo tempo em relação a seus valores médios (covariam). Ou ainda, mostra a simetria existente entre X e Y. (Assaf Neto, 2008 *apud* Fonseca, 2011, p. 11).

A covariância entre duas variáveis aleatórias é definida por:

$$Cov (X,Y) = Cov (X_1,X_2) = \sigma_{1,2} = E (X_1,X_2) - \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \quad (6)$$

Isto significa que duas variáveis podem ter:

[...] covariância nula (Cov = 0), quando não possuem nenhuma relação entre si. Podem ter covariância positiva (Cov > 0) quando se relacionam diretamente, ou seja, o aumento de uma implica no aumento da outra. A covariância negativa (Cov < 0) é observada quando a associação entre as variáveis ocorre de maneira inversa, ou seja, quando uma aumenta a outra diminui. A correlação busca explicar o grau de relacionamento

observado no comportamento de duas variáveis. Essa medida de relação mostra como duas variáveis se movimentam de forma independente e é medida pelo coeficiente de correlação, que varia de -1 a 1 (Sá Lima, 2016, p. 29).

Já a correlação (ρ , r ou CORR) seu conceito visa explicar:

[...] o grau de relacionamento verificado no comportamento de duas ou mais variáveis. A correlação entre duas variáveis mostra a maneira como elas se movimentam simultaneamente e pode ser medida através do coeficiente de correlação, que varia de menos um a mais um ($-1 < \text{CORR } x, y < +1$). É expressa através da covariância das variáveis e seus respectivos desvios-padrões. Se as variáveis apresentam comportamentos independentes, ou seja, não se relacionam entre si, são não correlacionadas e o coeficiente de correlação é igual a zero ($\text{CORR } x, y = 0$). Quando o coeficiente de correlação é igual a um ($\text{CORR } x, y = +1$), as variáveis são perfeitamente correlacionadas. Ou seja, o comportamento de X é diretamente proporcional ao de Y. Se X aumenta, Y segue a mesma tendência de aumento, e viceversa. Se o coeficiente de correlação estiver entre zero e um ($0 < \text{CORR } x, y < 1$), diz-se que as variáveis são positivamente correlacionadas e a variação delas ocorre no mesmo sentido mas não na mesma proporção. A situação contrária ocorre ao se verificar que o coeficiente de correlação é igual a menos um ($\text{CORR } x, y = -1$). Neste caso, X se movimenta de uma forma inversamente proporcional a Y. Ao mesmo tempo em que Y apresentar uma queda, X fará o movimento inverso, de aumento. Quando o coeficiente de correlação está entre zero e menos um ($-1 < \text{CORR } x, y < 0$), as variáveis são negativamente correlacionadas e sua variação se dá de forma contrária, mas não perfeitamente negativa (Fonseca, 2011, p. 12).

Na área econômica e financeira, e visando este estudo científico pode-se entender por correlação “a tendência de os retornos de dois ativos moverem-se juntos” (Jordan; Miller, 2008, p. 368 *apud* Barcellos, 2010, p. 16).

Ainda cabe ressaltar que, segundo Cohen (1988 *apud* Figueiredo Filho; Silva Júnior, 2009, p. 119), na correlação “valores entre 0,10 e 0,29 podem ser considerados pequenos; escores entre 0,30 e 0,49 podem ser considerados como médios; e valores entre 0,50 e 1 podem ser interpretados como grandes”, já para Dancey e Reidy (2006 *apud* Figueiredo Filho; Silva Júnior, 2009, p. 119-120) “apontam para uma classificação ligeiramente diferente: $r = 0,10$ até $0,30$ (fraco); $r = 0,40$ até $0,6$ (moderado); $r = 0,70$ até 1 (forte)”.

Mas, independentemente de quais autores sigamos, o certo é que quanto mais perto de 1 (independente do sinal) maior é o grau de dependência estatística linear entre as variáveis. No outro oposto, quanto mais próximo de zero, menor é a força dessa relação.

Sendo a correlação entre duas variáveis aleatórias definidas pela expressão:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (7)$$

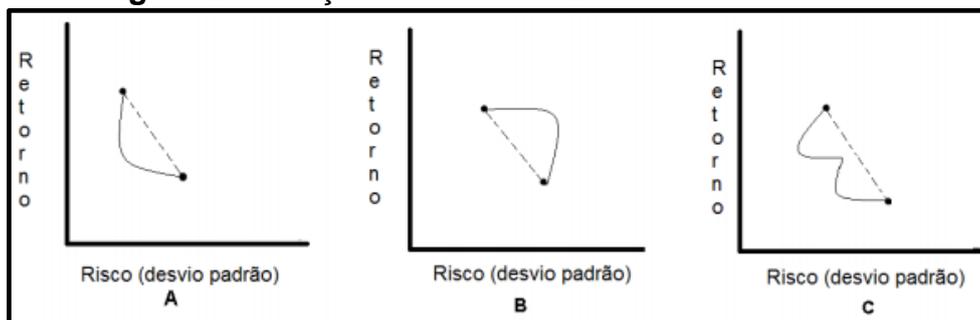
2.3.4 Fronteira Eficiente

Todo o conjunto de ativos possui uma Fronteira Eficiente, essa curva apresenta as combinações dos ativos pré-selecionados nas quais se obtém o menor risco possível para determinadas expectativas de retorno.

O conceito de Fronteira Eficiente foi desenvolvido em primeiro lugar por Harry Markowitz, no ano de 1952, em seu artigo Portfolio Selection. Nele, Markowitz mostrou que para um dado nível de retorno esperado o investidor deve escolher a combinação de ativos que gerem o menor risco possível. Dessa forma, a Fronteira Eficiente pode ser definida como o conjunto dos melhores portfólios possíveis para determinados retornos esperados, em suma ela define as “carteiras ótimas” (Corrêa; Souza, 2001 *apud* Vargens, 2011, p. 15).

De acordo com Markowitz, “esta lógica de seleção só faz sentido se for assumido que os investidores tomam suas decisões de investimento com base na racionalidade” (Barcellos, 2010, p. 19-20). É o que o teórico chama de Princípio E-V (E-V Principle).

Figura 2 - Relação da Fronteira Eficiente com o Risco



Fonte: Silva (2016, p. 16).

Em que, o gráfico:

A demonstra a carteira otimizada, o gráfico B mostra a carteira não otimizada, com um risco maior e o gráfico C demonstra a união das duas carteiras. As carteiras B e C não são combinações possíveis, pois não são otimizadas e são de alto risco (Silva, 2016, p. 16).

Premissas e Modelagem da Teoria de Markowitz

Harry Max Markowitz em 1952 em seu artigo “Portfolio Selection”, deu origem ao que hoje é conhecido como a Teoria Moderna do Portfólio, através de uma proposta baseada na otimização de carteiras.

Com o advento desta teoria foi introduzida a análise média-variância das carteiras de investimentos, alterando o processo de alocação de ativos em um processo de otimização, Markowitz acreditava que podia buscar uma nova

formulação na compreensão de risco e retorno nas carteiras de investimentos estando elas em conjunto e não apenas apostar em ativos isolados.

O processo de seleção de uma carteira pode ser dividido em duas fases. A primeira etapa começa com a observação e experiência e termina com crenças sobre os desempenhos futuros de títulos disponíveis. A segunda etapa começa com as crenças relevantes sobre desempenhos futuros e termina com a escolha de uma carteira. (Markowitz, 1952, p. 77 *apud* Silva, 2016, p. 4).

Para Markowitz o ponto principal é de que as escolhas não deveriam ser a esmo, mas sim a partir do planejamento calculado dos retornos das ações que iriam compor a carteira, sendo que diversificação é a palavra-chave.

Os trabalhos de Markowitz anularam o conceito de que as estratégias inocentes de diversificar uma determinada carteira, com a escolha aleatória dos ativos, minimizariam o risco dela. Para que um portfólio tenha riscos menores que os ativos que a integram individualmente, é preciso que os preços dos títulos não variem juntos na mesma direção e intensidade (Marques *et al.* 2013 *apud* Barroso, 2018, p. 16).

De acordo com Sharpe *et al.* (1995, p. 262 *apud* Almonacid, 2010, p. 19), as principais premissas adotadas por Markowitz para a construção de sua teoria foram as seguintes:

(i) Os investidores avaliam as carteiras apenas com base no retorno esperado e no desvio padrão dos retornos em dado período; (ii) Os investidores são avessos ao risco, sempre escolhendo a carteira de menor risco dentre as carteiras de mesmo retorno; (iii) Os investidores são racionais, sempre escolhendo a carteira de maior retorno dentre as carteiras de mesmo risco; (iv) Os ativos individuais são continuamente divisíveis, possibilitando aos investidores comprar frações de ativos; (v) Existe uma taxa livre de risco, na qual os investidores podem tanto emprestar quanto tomar emprestado; (vi) Os investidores têm a mesma opinião acerca da distribuição das probabilidades das taxas de retorno dos ativos, havendo, assim, um único conjunto de carteiras eficientes; (vii) Impostos e custos de transação são irrelevantes

Após o estudo das premissas listadas acima, o teórico (Markowitz) afirma que:

[...] as variáveis que interessam aos investidores na hora de selecionar uma carteira, seriam o retorno esperado e o risco. Para Markowitz, o retorno é o fator mais almejado pelo investidor e a variância o indesejável. Logo, o objetivo é a obtenção para um mesmo retorno, de carteiras com a menor variância possível e, para que isto ocorra, o investidor deve se valer da diversificação dos ativos (Silva, 2019, p. 23).

Já para Peter Bernstein o objetivo de Markowitz foi:

[...] utilizar a noção de risco para compor carteiras para investidores que consideram o retorno esperado algo desejável e a variância do retorno algo indesejável. O que parece bem lógico e sensato para a grande maioria dos investidores. O modelo mostra que enquanto o retorno de uma carteira diversificada equivale à média ponderada dos retornos de seus componentes individuais, sua volatilidade será inferior à volatilidade média de seus componentes individuais. Mostrando que a diversificação é uma espécie de dádiva (Bernstein, 1997 *apud* Gonçalves Júnior *et al.*, 2002, p. 4).

Este método permitiu a obtenção de carteiras de variância mínima para cada nível de retorno esperado (retorno médio). Assim, para cada nível de retorno esperado, os portfólios eficientes minimizam o risco, medido pela variância ou desvio padrão dos retornos passados.

Esta teoria foi concebida inicialmente para modelar portfólios do mercado financeiro nos quais parte-se da premissa de que os investidores consideram o retorno esperado um fator desejável, e a variância dos retornos um fator indesejável. Portanto, relaciona-se o retorno esperado do portfólio (E_{Rp}) à sua variância total (V), que corresponde ao risco do portfólio. [...] Considera-se que o retorno da carteira pode ser representado pela média dos retornos obtidos ao longo do tempo, sendo, portanto igual ao valor esperado da série histórica disponível (Bassi Arce, 2014, p. 21 -22).

Logo, percebe-se que o modelo de Markowitz que otimiza uma carteira de investimento, tem como uma equação de minimização da variância sujeito a uma restrição que seja um retorno esperado pelo investidor, resultando em valores de pesos ótimos dos ativos, ou seja:

Minimizar:

$$\sigma_C^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N X_i X_j \sigma_{i,j} \quad (8)$$

Sujeito a:

$$\bar{R}_C = \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i \quad (9)$$

Sendo:

σ_C^2 = Variância da carteira;

σ_i^2 = Variância do ativo;

σ_{ij} = Covariância do ativo i, j;

X_i = Peso do ativo i;

X_j = Peso do ativo j;

\bar{R}_C = Retorno esperado da carteira;

\bar{R}_i = Retorno esperado do ativo i.

Em que o investidor decide a que valor de retorno esperado estará se submetendo. Essa restrição assegura que se obtenham unicamente combinações possíveis, eliminando aquelas que não alcancem a rentabilidade esperada, desejada para a carteira, ou excedam os recursos disponíveis para investimento. A determinação dessas ponderações ótimas assegurará que a carteira escolhida seja eficiente, na medida em que, para um determinado retorno especificado, o risco será minimizado. Isso se caracteriza como um problema de otimização, em que é necessário determinar frações ótimas capazes de minimizar a variância da carteira, levando em conta uma restrição (Farias; Moura, 2013, p. 117).

Para solucionar esse problema, é necessário construir uma função L, chamada de função lagrangiana, que, por meio do operador λ^2 , o operador lagrangiano, incorpora a restrição especificada à função objetivo do investidor, que será minimizada:

$$L = \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N X_i X_j \sigma_{i,j} + \lambda \left[\bar{R}_C - \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i \right] \quad (10)$$

A minimização “consiste em derivar a função L em relação às proporções X_i e ao operador λ , igualando, em seguida, a zero” (Farias; Moura, 2013, p. 118). Estas são chamadas de condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, N \quad (11)$$

Isso determinará um “conjunto de N + 1 equações para N incógnitas (as frações ou pesos dos ativos), sendo dessa forma passível de solução” (Farias; Moura, 2013, p. 118). Para exemplificar, vamos desenvolver a função objetivo para dois ativos:

$$L = X_1^2 \sigma_1^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{1,2} + X_2^2 \sigma_2^2 + \lambda \left[\bar{R}_C - X_1 \bar{R}_1 - X_2 \bar{R}_2 \right] \quad (12)$$

Onde derivando a função L com relação a X_1 , X_2 e λ , e igualando a zero em seguida, temos as seguintes condições de primeira ordem:

² O valor do operador lagrangiano indica enquanto seria incrementado o risco da carteira para cada 1% de aumento em seu retorno esperado. Uma vez que a função objetivo é uma função não linear, seu coeficiente angular (derivada) varia continuamente. Logo, λ também varia (Samanez, 2007 *apud* Farias; Moura, 2013, p. 117).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X_1} &= 2X_1\sigma_1^2 + 2X_2\sigma_{1,2} - \lambda\bar{R}_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} &= 2X_2\sigma_2^2 + 2X_1\sigma_{2,1} - \lambda\bar{R}_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \bar{R}_c - X_1\bar{R}_1 - X_2\bar{R}_2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Cria-se então um sistema de equações, em que:

[...] X_1 X_2 resultarão nos pesos ótimos para a minimização do risco. A fim de solucionar o sistema, é necessário substituir, nas equações, os valores da variância de cada ativo, σ_1^2 e σ_2^2 , os retornos esperados individuais, \bar{R}_1 e \bar{R}_2 , a covariância entre o par de títulos, $\sigma_{1,2}$, e, o mais importante, o retorno esperado que o investidor deseja obter: \bar{R}_c (Farias; Moura, 2013, p. 118).

METODOLOGIA

Este estudo foi elaborado em duas fases: a primeira: um estudo de revisão sistemática de literatura, o qual inicialmente buscou realizar uma análise teórica relacionada ao assunto trabalhado, ou seja, aspectos relevantes ligados ao tema. Os dados e informações foram levantados mediante pesquisa bibliográfica “desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos” (Gil, 2002, p. 44) e material didático na internet, assim como em livros e periódicos de circulação nacional, além de pesquisa documental a qual: 3

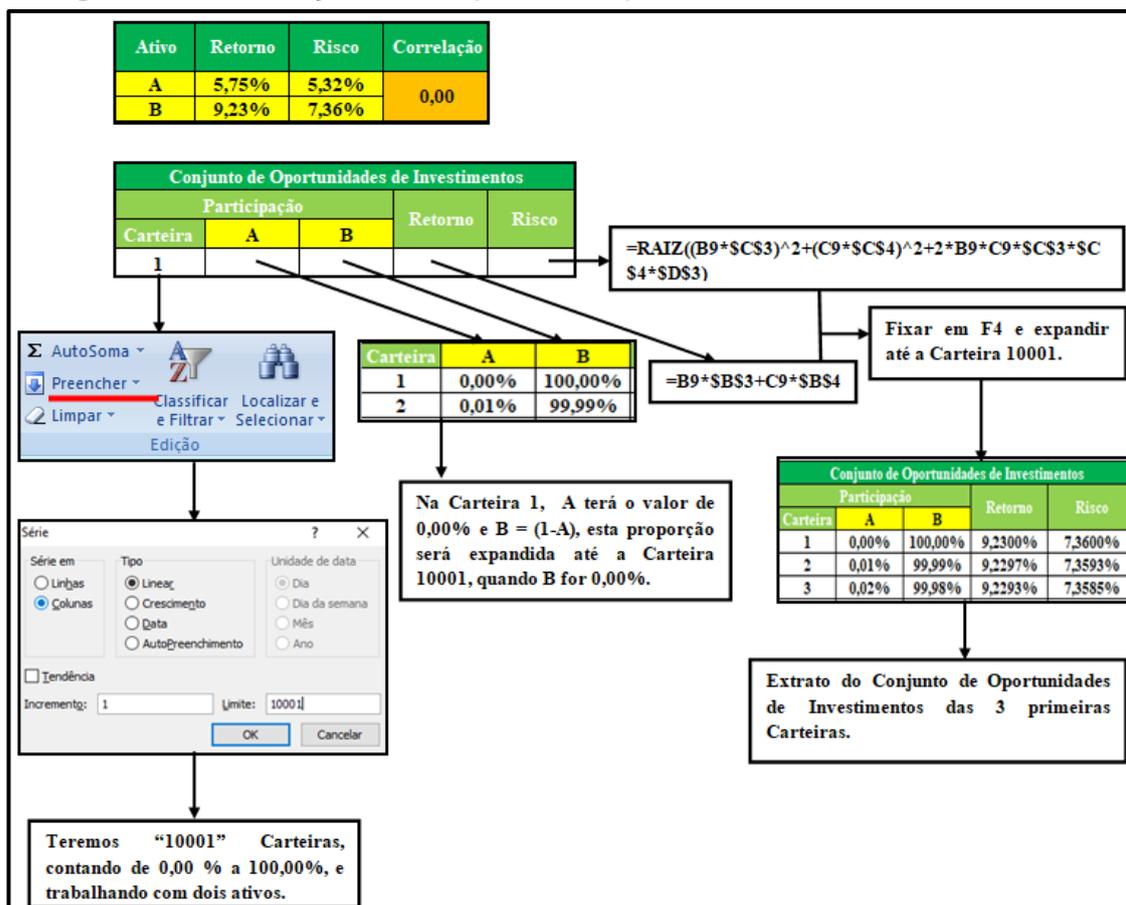
[...] apresenta algumas vantagens por ser “fonte rica e estável de dados”: não implica altos custos, não exige contato com os sujeitos da pesquisa e possibilita uma leitura aprofundada das fontes. Ela é semelhante à pesquisa bibliográfica, segundo o autor, e o que a diferencia é a natureza das fontes, sendo material que ainda não recebeu tratamento analítico, ou que ainda pode ser reelaborado de acordo com os objetivos da pesquisa (Gil, 2002, p. 44).

Já a segunda: A construção e aplicação didática da Diversificação de Ativos em Excel, com dados hipotéticos (apenas para compreensão do modelo) para embasar a respectiva teoria.

Construção e Aplicação Didática da Diversificação de Ativos em Excel

Iremos observar dois ativos (hipotéticos e fictícios, apenas para fins didáticos), os quais apresentam os seguintes dados: Ativo A: Retorno = 5,75% e Risco = 5,32%, já para o Ativo B, obteve-se um Retorno de 9,23% e um Risco de 7,36%, e uma correlação igual à zero, após estas informações, inicialmente construiu-se o Conjunto de Oportunidades de Investimentos (Figura 3).

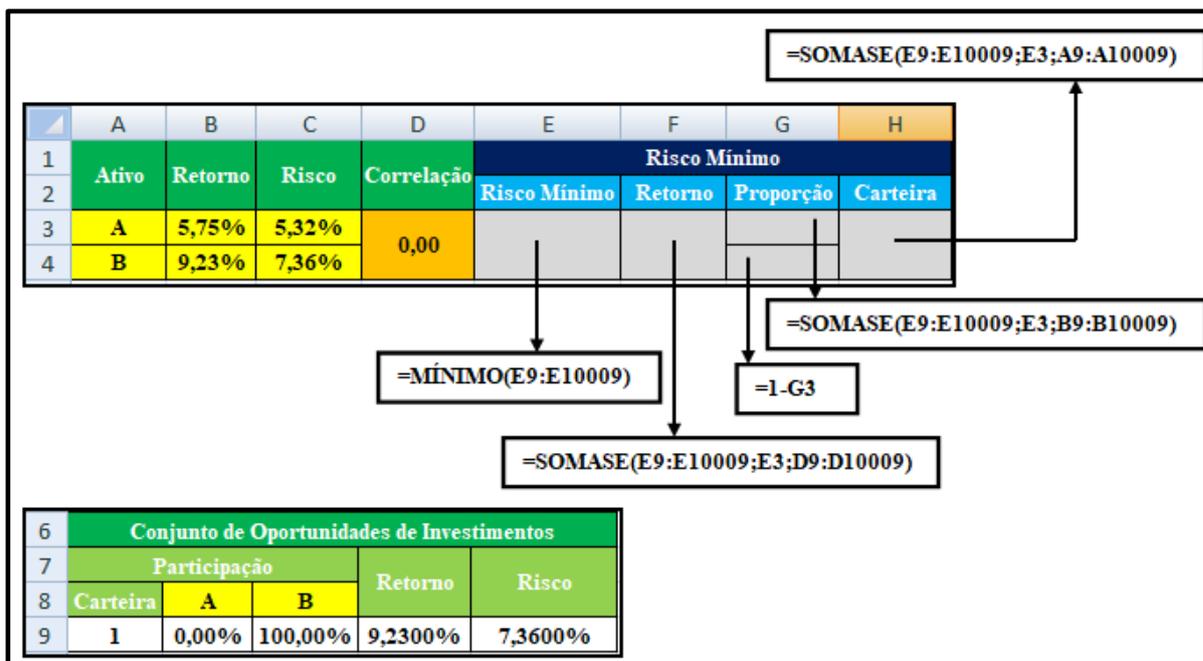
Figura 3 - Construção do Conjunto de Oportunidades de Investimentos



Fonte: Elaboração própria.

Após a construção do Conjunto de Oportunidades de Investimentos, elabora-se o Risco Mínimo, a qual dará de forma dinâmica o: Risco Mínimo, Retorno, Proporção de cada Ativo e a Carteira que contém estas informações entre as 10001 opções (Figura 4).

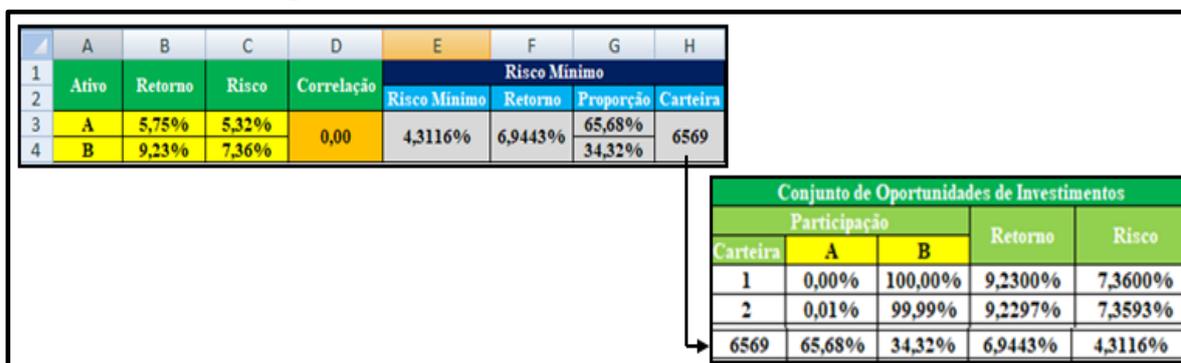
Figura 4 - Construção Dinâmica do Risco Mínimo



Fonte: Elaboração própria.

O que irá fornecer como resultado, uma planilha dinâmica que resumirá qual a melhor carteira com risco mínimo, no caso, levando como informação os dados iniciais de retorno e risco dos ativos A e B, e respectiva correlação, obteve-se como resultado (Figura 5), a carteira 6569:

Figura 5 - Melhor Carteira com Risco Mínimo

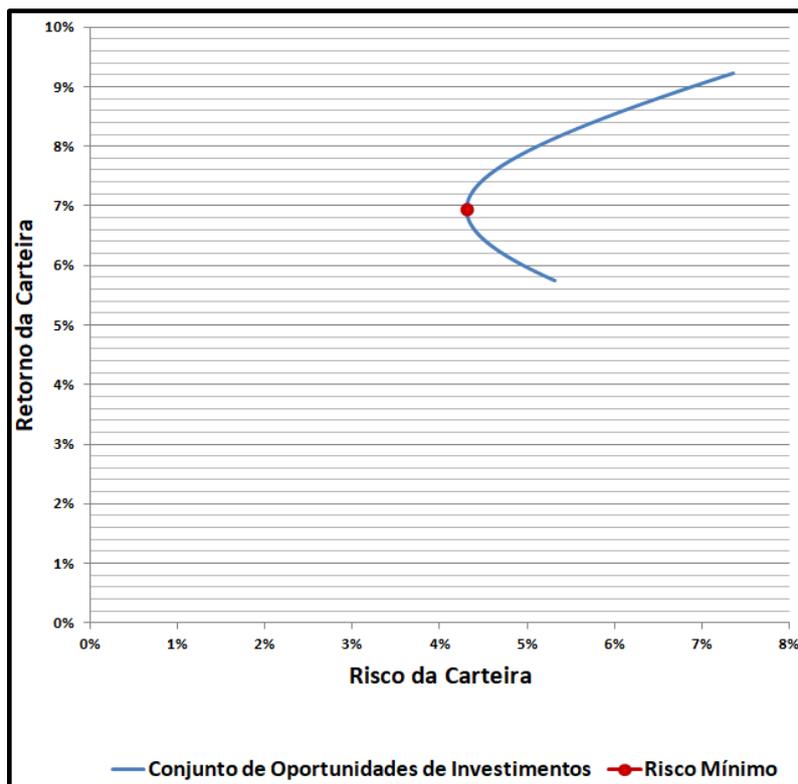


Fonte: Elaboração própria.

Isto significará que a opção que melhor atenderá o princípio do risco mínimo será a de proporção de 65,68% para o ativo A e 34,32% para o ativo B, claro que se forem alterados os valores de Retorno, Risco, e a própria correlação teremos outros resultados (A tabela será dinâmica para atender os interesses do usuário).

E para finalizar, insere-se o gráfico, e obtêm-se as informações pertinentes para o Conjunto de Oportunidades de Investimentos e seu Risco Mínimo (Fronteira Eficiente):

Gráfico 1 - Conjunto de Oportunidades de Investimentos/Risco Mínimo



Fonte: Elaboração própria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações finais deste estudo serão divididas em três partes sob a ótica do autor: Autocrítica, Sugestões para Trabalhos Futuros e Contribuições Acadêmicas para a Comunidade.

Autocrítica

Pensa-se que o trabalho atingiu seus objetivos, mas não exauriu todas as opções que podem ser realizadas quando falamos em diversificação de ativos, mas acredita-se ter conseguido realizar uma boa revisão da literatura sobre o assunto.

Sugestões para Trabalhos Futuros

Como sugestão para trabalhos futuros, pensa-se ser interessante realizar a comparação de outros modelos de avaliação de diversificação de ativos como, por exemplo: modelo de Sharpe, método CAPM, e o modelo de múltiplos índices, com o que foi aplicado nesta pesquisa, e respectiva utilização de outros programas, como o Software Estatístico R para fazer um comparativo entre ele e o software Excel e ver quais as diferenças há entre os dois, além de uma possível ampliação da planilha dinâmica em Excel elaborada para este estudo, uma vez que a mesma calcula somente os pesos ótimos, mas necessita de informações previamente calculadas como: retorno e risco dos

ativos A e B, e respectiva correlação entres eles, sendo estas questões limitações do presente estudo.

Contribuições Acadêmicas para a Comunidade

O presente estudo apresenta uma revisão da literatura sobre o Modelo de Markowitz e uma planilha dinâmica que traz de forma didática como se dá a diversificação de ativos, podendo ser usadas para ajudar quem está interessado em entrar no mercado financeiro, porém, não é o único método de avaliação, existem dezenas de outros publicados em artigos, periódicos, os quais alguns inclusive fazem parte da bibliografia desta pesquisa. A Teoria de Markowitz e sua metodologia foram utilizadas devido a sua simplicidade e ampla utilização para investidores amadores na área e para quem quer começar a investir, podendo assim, aprofundar-se.

INVESTMENT ANALYSIS BY MARKOWITZ MODEL: A BRIEF REVIEW OF THE LITERATURE AND ITS APPLICATION IN EXCEL

Abstract: *The present study is a systematic review of the literature on Modern Portfolio Theory, formulated by Harry Max Markowitz in 1952 in his article "Portfolio Selection", which aims to optimize asset portfolios. The research was based on the following aspects: bibliographic, documentary research and construction and didactic application of Asset Diversification in Excel, with the use of hypothetical data (only for understanding the model) to support the respective Markowitz theory. Emphasis was placed on the concepts inherent to the investment area and also on the statistical part, aiming to simplify and make reading easy to understand, even for lay readers, serving as a basis for them to get deeper into the topic. As a result, it was possible to observe the impact that Markowitz's contribution brought to the development of theories on financial markets.*

Keywords: *Investment Analysis; Markowitz; Portfolio Optimization.*

JEL Classification: *B26*

REFERÊNCIAS

ALMEIDA JUNIOR, T. de. **Análise de Risco e Retorno de Fundos de Investimentos Brasileiros**. 2009. 61f. Dissertação (Mestrado em Gestão de organizações) - Universidade Metodista de São Paulo, São Bernardo do Campo, 2009.

ALMONACID, G. A. **Aplicabilidade da Teoria de Markowitz para Investimentos em Ativos do Real Estate: Estudo de Caso de uma Carteira**

Mista. 2010. 76f. Monografia (MBA em Real Estate) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

ALTMANN, F. L. **Análise do Perfil de Poupadores Investidores Pessoa Física do Mercado Financeiro: Um Estudo Multicasos Realizado na Cidade de Teotônia/RS.** 2017. 87f. Monografia (Graduação em Administração) - Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, 2017. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/1958/1/2017FredericoLuisAltmann.pdf>. Acesso em: 7 jun. 2024.

BARCELLOS, R. L. **Avaliação da Fronteira Eficiente Multiperiodicial para Otimização de Carteiras.** 2010. 62f. Monografia (Graduação em Administração) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/36863/000819399.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 7 jun. 2024.

BARROSO, C. H. **Análise de uma Carteira de Investimento Utilizando a Teoria de Markowitz e o Modelo CAPM.** 2018. 36f. Monografia (Graduação em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2018.

BASSI ARCE, P. E. **Aplicação da Teoria do Portfólio para otimização de Carteiras de Contratos de Energia Elétrica e Gestão de Risco.** 2014. 89f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18154/tde-16072014-113229/publico/Paulo.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2024.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: Ações e Interações no Processo de Ensino-Aprendizagem.** 1992. 460f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992. Disponível em: https://www.psiem.fe.unicamp.br/pf-psiem/burak_dionisio_d.pdf. Acesso em: 12 jun. 2024.

DIONÍZIO, C. L. R. **Evidenciação dos Ativos Intangíveis de Empresas Brasileiras Listadas na BM&FBOVESPA a Luz do CPC 04 (R1).** 2016. 84f. Monografia (Graduação em Ciências Contábeis) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2016.

FARIAS, T. A; MOURA, F. R. de. Carteiras Eficientes e Ingênuas: uma Análise Comparativa com o uso do Modelo de Markowitz. **Revista de Economia Mackenzie**, São Paulo, v. 11, n. 2, maio/ago. 2013.

FERREIRA, R. D. **Análise de Risco e Retorno das Ações de Empresas Listadas no Nível 1 de Governança Corporativa em Relação ao Mercado Tradicional da Bolsa de Valores de São Paulo.** 2008. 95f. Monografia (Graduação em Administração) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

FIGUEIREDO FILHO, D. B. F.; SILVA JÚNIOR, J. A. da. Desvendando os Mistérios do Coeficiente de Correlação de Pearson (r). **Revista Política Hoje**. Recife, v. 18, n. 1, 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/politica hoje/article/viewFile/3852/3156>. Acesso em: 12 jun. 2024.

FONSECA, C. G. **Aplicação do Modelo de Markowitz na Seleção de Carteiras Eficientes**: Uma Análise da Relação entre Risco e Retorno. 2011. 39f. Monografia (MBA em Finanças e Gestão de Risco) - Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: http://modelosfinanceiros.com.br/assets/documentos/selecao_de_carteiras_eficientes.PDF. Acesso em: 12 jun. 2024.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GONÇALVES JÚNIOR, C. *et al.* Seleção de Carteiras Através do Modelo de Markowitz para Pequenos Investidores (Com o Uso de Planilhas Eletrônicas). *In*: SIMPEP, 9., Bauru, SP. **Anais [...]**, Bauru, 2002. Disponível em: http://www.rodrigofernandez.com.br/ecomp/ref/excel_markowitz.pdf. Acesso em: 12 jun. 2024.

HENDRIKSEN, E. S; VAN BREDA, M. F. **Teoria da Contabilidade**. Tradução: Antonio Z. Sanvicente. São Paulo: Atlas, 1999.

IUDÍCIBUS, S. de. **Teoria da Contabilidade**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

JORDAN, B. *et al.* **Princípios de Administração Financeira**. 2. ed. Traduzido por: Andréa Maria A. Minardi. São Paulo: Atlas, 2002.

PEREIRA, L. B; HENRIQUE, D. C. Otimização de Investimentos pelo Modelo de Markowitz via Desenvolvimento de uma Ferramenta em Excel. **Iberoamerican Journal of Industrial Engineering**, Florianópolis, SC, v. 8, n. 16, p. 167-195, 2016. Disponível em: <http://incubadora.periodicos.ufsc.br/index.php/IJIE/article/download/v8n1608/pdf>. Acesso em: 12 jun. 2024.

RAMBO, A. C. **O Perfil do Investidor e Melhores Investimentos**: da Teoria à Prática do Mercado Brasileiro. 2014. 85f. Monografia (Graduação em Ciências Econômicas) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

ROGERSON, P. A. **Métodos Estatísticos para Geografia**: um Guia para o Estudante. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SÁ LIMA, T. C. **Aplicação do Modelo de Markowitz para a Otimização de Carteiras de Títulos Públicos**. 2016. Monografia (Graduação em Engenharia de Produção) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2016.

SILVA, T. E. B. de C. **Aplicação do Modelo de Markowitz na Otimização de Carteiras de Investimento de Risco em um Único Período**. 2019.

Monografia (Graduação em Estatística) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

SILVA, A. P. da. **Avaliação de Risco e Retorno de uma Carteira de Ações da IBrX50 pela Visão de Markowitz e Sharpe**. 2016. 56p. Monografia (Especialização em Engenharia Econômica) - Universidade Federal do Pampa, Alegrete, 2016.

VARGENS, D. D. **Fronteira Eficiente Aplicação para Quatro Ativos no Mercado Brasileiro**. 2011. 34f. Monografia (Graduação em Administração) - Faculdade de Administração e Ciências Contábeis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <https://pantheon.ufrj.br/bitstream/11422/5121/1/DDVargens.pdf>. Acesso em: 7 jun. 2024.

VIECILI, C. R. C. **Modelagem Matemática: Uma Proposta para o Ensino da Matemática**. 2006. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

WILK, M. **Gestão de Risco Financeiro: Um Estudo dos Principais Modelos de Gerenciamento de Risco (no Mercado Financeiro)**. 1999. 73f. Monografia (Graduação em Economia) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.