DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES DE ATIVIDADE CRIATIVA DE ESTUDANTES EM ESTABELECIMENTOS DE ENSINO SUPERIOR

DESARROLLO DE LAS HABILIDADES DE ACTIVIDAD CREATIVA DE ESTUDIANTES EN ESTABLECIMIENTOS EDUCATIVOS SUPERIORES

DEVELOPING CREATIVE ACTIVITY ABILITIES OF STUDENTS IN HIGHER EDUCATIONAL ESTABLISHMENTS

Sergey Nikolaevich DOROFEEV[1]
Rustem Adamovich SHICHIYAKH[2]
Leisan Nafisovna KHASIMOVA[3]

RESUMO: O artigo discute métodos de resolução de problemas geométricos com o uso ativo de métodos como análise e síntese, analogia e generalização, com base no pensamento teórico sobre o princípio da ascensão do simples ao complexo, a fim de desenvolver a capacidade dos alunos para a atividade criativa. Os autores desenvolveram sistemas de problemas, focados na formação da capacidade de "fazer" descobertas independentes tanto no processo de resolução de um problema quanto na fase de pesquisa do resultado da solução. O sistema de problemas desenvolvido visa encontrar uma maneira de resolver um problema mais complexo após um método semelhante ter sido usado em relação a outro problema mais simples ou particular. Os participantes do experimento são futuros mestres em educação pedagógica (perfil "Educação Matemática") na Universidade Estadual Togliatti. O artigo mostra que os métodos mais eficazes de preparar futuros mestres em educação matemática para a atividade profissional criativa podem ser métodos em que o conhecimento científico é tomado como analogia e generalização. Verificou-se que no processo de aprendizagem da resolução de problemas geométricos inseridos no sistema desenvolvido, os alunos apresentam indicadores superiores no nível de formação da atividade criativa, em resultado do desenvolvimento da capacidade do futuro mestre de educação pedagógica (perfil "Educação Matemática") à analogia e sua aplicação em situações específicas, sua capacidade de usar as propriedades estabelecidas, habilidades e capacidades formadas, técnicas e métodos de ação em relação a outro objeto em novas condições e para novos fins, o uso de conceitos matemáticos e teoremas em problemas específicos cada vez mais diversos.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria. Tarefa. Analogia. Generalização. Atividade criativa.

RESUMEN*: El artículo discute métodos para la resolución de problemas geométricos con el uso activo de métodos como análisis y síntesis, analogía y generalización, basados en el*

[1] Universidade Estadual Togliatti (TSU), Tolyatti – Rússia. Professor do Departamento de Matemática Superior e Educação Matemática. Doutor em Ciências Pedagógicas. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1925-9428. E-mail: komrad.dorofeev2010@yandex.ru

[2] Universidade Agrária Estadual de Kuban em homenagem a I.T. Trubilin (KUBSAU), Krasnodar – Rússia. Professor Associado do Departamento de Gestão. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5159-4350. E-mail: 651728@mail.ru

[3] Universidade Federal de Kazan (KPFU), Kazan – Rússia. Docente do Departamento de Ciências Jurídicas e Sociais. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1538-1788. E-mail: leisan@mail.ru

pensamiento teórico sobre el principio de ascenso de simple a complejo para desarrollar la capacidad de los estudiantes para la actividad creativa. Los autores han desarrollado sistemas de problemas, enfocados en la formación de su capacidad para "hacer" descubrimientos independientes tanto en el proceso de resolución de un problema como en la etapa de investigación del resultado de la solución. El sistema de problemas desarrollado tiene como objetivo encontrar una manera de resolver un problema más complejo, después de que se haya utilizado un método similar en relación con otro problema más simple o particular. Los participantes en el experimento son futuros maestros de la educación pedagógica (perfil "Educación Matemática") en la Universidad Estatal de Togliatti. El artículo muestra que los métodos más efectivos para preparar a los futuros maestros de la educación matemática para la actividad profesional creativa pueden ser métodos de conocimiento científico como la analogía y la generalización. Se reveló que en el proceso de aprendizaje para resolver problemas geométricos incluidos en el sistema desarrollado, los estudiantes demuestran indicadores más altos del nivel de formación de la actividad creativa, como resultado del desarrollo de la capacidad del futuro maestro de la educación pedagógica (perfil "Educación Matemática") a la analogía y su aplicación en situaciones específicas, su capacidad para utilizar las propiedades establecidas, destrezas y habilidades formadas, técnicas y métodos de acción en relación con otro objeto en nuevas condiciones y para nuevos propósitos, el uso de conceptos matemáticos y teoremas en problemas específicos cada vez más diversos

PALABRAS CLAVE*: Geometría. Tarea. Analogía. Generalización. Actividad creativa.*

ABSTRACT*: The article discusses methods of solving geometric problems with the active use of methods such as analysis and synthesis, analogy and generalization, based on theoretical thinking about the principle of rising from simple to complex, to develop students' capacity for the creative activity. The authors developed problem systems, focused on building the capacity to "make" independent discoveries both in the process of solving a problem and in the phase of research for the result. The problem system developed aims to find a way to solve a more complex problem, after a similar method been used in another simpler or more particular problem. Participants in the experiment are future masters in pedagogical education (profile "Mathematics Education") at Togliatti State University. The article shows that the most effective methods to prepare future masters in mathematics education for creative professional activity can be methods such as scientific knowledge as analogy and generalization. It was found that in the learning process of solving geometric problems inserted in the developed system, students present superior indicators of the level of formation of creative activity, as a result of the development of the capacity of the future teacher of pedagogical education (profile "Mathematics Education") to analogy and its application in specific situations, its ability to use established properties, formed skills and abilities, techniques and methods of action in relation to another object under new conditions and for new purposes, the use of mathematical concepts and theorems in specific problems increasingly diverse.*

KEYWORDS*: Geometry. Task. Analogy. Generalization. Creative activity.*

Introdução

A pesquisa teórica e generalização de nossa própria experiência pedagógica e da experiência pedagógica de professores famosos e professores de matemática (DOROFEEV *et al.*, 2018; GLAZKOV; EGUPOVA, 2017; KALINKINA, 1995; KALMYKOVA, 2013) nos levou a entender que o mestre em educação pedagógico moderno (perfil "Educação Matemática") deve possuir a um nível suficientemente elevado tanto o aparato matemático como os métodos de ensino das disciplinas matemáticas, ser capaz de mostrar a sua confiança nos alunos, funcionar como fonte de experiência humana acumulada ao longo de todo o tempo da existência humana na terra, que pode usar para enriquecer seu conhecimento e compreensão do meio ambiente; sentir o estado de espírito emocional de cada aluno, ser capaz de expressar abertamente, aceitar e compreender o seu estado mental e as suas experiências, deve ser capaz de mostrar a sua desenvoltura criativa no processo de ensino de métodos matemáticos de cognição do mundo envolvente (DOROFEEV, 2000; VYGOTSKY, 2007; TEMERBEKOVA *et al.*, 2013; VAGANOVA *et al.*, 2020). O conceito de atividade criativa é bastante complexo e multifacetado, o significado e o conteúdo deste conceito são constantemente refinados, reabastecidos e melhorados. Os níveis de manifestação da atividade criativa pelos alunos dependem de muitos fatores internos e externos, tanto dependentes quanto independentes, o nível de desenvolvimento ontogenético de cada indivíduo, seu estado psicofisiológico e mental, características psicológicas individuais, o nível de educação e preparação para perceber um fato matemático ou um conceito matemático, o nível de desenvolvimento de suas habilidades intelectuais etc. (KALINKINA, 1995; KALMYKOVA, 2013).

A ciência psicológica chama nossa atenção com muitas abordagens diferentes para a interpretação dos conceitos de "atividade criativa". Como regra, a atividade criativa está associada à manifestação da natureza ativa da atividade criativa em certas formas. Do ponto de vista psicológico, a atividade criativa pode ser interpretada como um conjunto de propriedades do sistema nervoso humano, ou como um certo estado mental de uma pessoa, ou como uma característica da atividade vital de uma pessoa, ou como sua propriedade. Assim, pode-se argumentar que a atividade criativa é determinada pela ação de fatores internos e externos, cada um baseando-se no mais importante - o desejo e a capacidade do aluno de descobrir novos fatos e novos conhecimentos até então desconhecidos para ele (DAVYDOV, 2000; PODLASY, 2001; WINTER, 2006).

No processo de formação da atividade criativa, todos os processos mentais estão envolvidos simultaneamente ou em uma determinada sequência, condicionados por nossas sensações, percepção, atenção, imaginação, emoções, memória, pensamento. Quando eles interagem, objetos do mundo real são refletidos e suas imagens são formadas em nossa consciência, percepção pessoal da realidade em um determinado momento no tempo e em uma determinada situação. A ciência pedagógica moderna conhece vários meios, técnicas, métodos e formas que contribuem para o desenvolvimento da atividade criativa. Porém, até agora não sabemos em que medida, em que condições e quando é possível utilizar este ou aquele método de ensino, esta ou aquela forma de organização da atividade educacional e cognitiva, este ou aquele meio de ensino, para dizer com segurança que os meios, métodos e formas escolhidos por nós em determinado sistema contribuem grandemente para a formação da atividade criativa (ANDREEV, 1988; DAVYDOV, 2000; LERNER, 2016; MUDRIK, 2004).

Metodologia

O desenvolvimento da atividade criativa dos alunos depende em grande medida do ensino de conceitos matemáticos e métodos do tipo de conhecimento científico com a utilização ativa de métodos como análise e síntese, analogia e generalização, concretização e comparação, com base no pensamento teórico sobre o princípio da ascensão do simples ao complexo, do abstrato ao concreto, do particular ao geral, usando tecnologias de aprendizagem avançadas, por exemplo, aprendizagem centrada no aluno, aprendizagem diferenciada, aprendizagem através de UDE, informática e tecnologias digitais (DAVYDOV, 2000; MUDRIK, 2004; UTEEVA, 2015; VAGANOVA *et al.,* 2020).

Em nosso conceito de formação da atividade criativa nos futuros mestres da educação pedagógica, aderimos a uma abordagem pessoal e a uma orientação humanística ao prepará-los para a organização da atividade criativa. A capacidade do futuro Mestre em Educação Pedagógica (perfil “Educação Matemática”) para a analogia e a sua aplicação em situações específicas é caracterizada pela sua capacidade de utilizar propriedades estabelecidas, competências e habilidades formadas, técnicas e métodos de ação em relação a outro objeto em novas condições e para novos fins. O desenvolvimento da capacidade de analogia é facilitado pelo processo de uso de conceitos matemáticos e teoremas em problemas específicos cada vez mais diversos (DAVYDOV, 2000; DOROFEEV, 2000; LODATKO, 2015; MENCHINSKAYA, 2004).

Esses podem ser problemas para encontrar uma maneira de resolver um problema mais complexo, depois que um método semelhante foi usado em relação a outro problema mais simples ou particular. A capacidade do futuro mestre de educação pedagógica (perfil “Educação Matemática”) para a abstração e a sua aplicação em situações específicas caracteriza-se pela sua capacidade de evidenciar determinadas características do objeto em estudo. O desenvolvimento da capacidade de abstração é facilitado pela capacidade do professor de conduzir seus alunos a cada novo conceito, a cada novo teorema com a ajuda de exemplos bem escolhidos para comparação, destacando características comuns ou conexões regulares gerais entre as características e deixar os próprios alunos formulando a conclusão. Essa abordagem para a introdução de novos conceitos e fatos até então desconhecidos para os alunos desenvolve a capacidade não apenas de abstração, mas também de generalização. A habilidade do futuro professor de matemática de generalizar e aplicá-la em situações específicas é caracterizada pela habilidade de identificar características comuns em uma série de objetos e grupos de objetos nesta base. Quanto mais amplas e diversificadas as generalizações, quanto mais independência os alunos demonstram, mais eficaz é o efeito do método de síntese de um conceito com a ajuda de exemplos na formação da sua atividade criativa. Recomenda-se passar de generalizações, que se baseiam em exemplos específicos e levam a conclusões particulares, para generalizações, que se baseiam em vários conceitos e fatos, ampliando gradativamente o círculo do material generalizado (DAVYDOV, 2000; LODATKO, 2015; SAMYGIN; STOLYARENKO, 2012; UTEEVA; ORAZYMBETOVA, 2012).

Resultados

A formação da atividade criativa no futuro mestre em educação pedagógica (perfil "Educação matemática") está intimamente ligada à formação da capacidade de compor um todo a partir de suas partes e quebrar o todo nas partes que o constituem. Como você sabe, os alunos se familiarizam com as primeiras ideias sobre a categoria do todo na escola básica ao estudar as frações. Lá eles aprendem a quebrar um todo, por exemplo, uma maçã em suas partes constituintes, destacando uma metade ou um terço etc. Mais tarde, ao longo de todo o período de estudo, a habilidade matemática de dividir o todo em partes e formar um todo de suas partes é gradualmente transformado na categoria filosófica do todo. Em matemática, a categoria do todo é entendida como a completude da solução do problema, a completude do sistema de axiomas ou a natureza fechada do processo matemático. Por exemplo, ao resolver equações irracionais, uma das maneiras mais comuns é elevar ambos os lados da equação à potência desejada. É claro que, neste caso, é possível que raízes extras sejam adquiridas. Restringir a solução de uma equação irracional pelas raízes da equação recém-obtida gera uma incompletude do problema proposto. Nesta tarefa, apenas parte dela é completada: a equação original é substituída por uma mais geral - a algébrica, obtida a partir do que é dado pela liberação de radicais. Para garantir a integridade da solução para uma equação irracional, é necessário descobrir quais das raízes da equação algébrica são as raízes da equação irracional e quais não são, ou seja, vão além do escopo da definição. A substituição padrão de uma equação irracional por uma algébrica obtida de uma dada equação, elevando ambas as partes ao poder apropriado, acarreta uma violação de uma das leis básicas da dialética: a lei da negação da negação. De acordo com essa lei, o antigo não é simplesmente descartado e substituído pelo novo, mas de acordo com o princípio da continuidade, do primeiro se tira o necessário para o desenvolvimento do novo. Nesse caso, não apenas substituímos a equação irracional por uma algébrica, mas levamos em consideração que a equação original contém radicais que impõem certas restrições a quantidades desconhecidas.

Vamos explicar isso com um exemplo específico: Encontre a maior raiz da equação:

$\sqrt{x^2+4x+7}=\sqrt{13-x}$. Para obter uma resposta inequívoca à pergunta feita, é necessário resolver uma situação problemática específica. Para este fim, elevaremos ao quadrado ambos os lados da equação. Como resultado, obtemos uma nova equação $x^2+4x+7=13-x$. Deve-se notar que o domínio da primeira equação é mais estreito do que o domínio da segunda equação. O domínio da primeira equação é o intervalo $(-\infty;\quad 13]$, o domínio do segundo é toda a reta numérica. O domínio da equação inicialmente dada é o intervalo: $(-\infty;\quad 13]$. Portanto, a partir das raízes da equação quadrática $x^2+5x-6=0$ precisamos selecionar aqueles que se enquadram neste intervalo. Resolvendo a segunda equação, descobrimos que $x_1 = 1,\ x_2 = -6$. Ambos os números caem no domínio da primeira equação, o que significa que servem como raízes da equação. Escolhendo o maior - 1. Resposta: 1.

Na prática de ensinar crianças em idade escolar a resolver equações irracionais, muitas vezes existem aquelas cujo escopo se restringe às raízes dessa equação. A este respeito, considere a equação: $\sqrt{-x^2+8x-15}=\sqrt{x-5}$. Usando a técnica acima, elevaremos ao quadrado ambos os lados da equação. Como resultado, obtemos a equação algébrica $-x^2+8x-15=x-5$. Após transformações elementares, trazemos esta equação para a forma $x^2-7x+10=0$. Resolvendo esta equação, descobrimos que $x_1 = 2,\ x_2 = 5$.

Agora vamos encontrar o domínio de definição da equação dada. Exigimos isso $\begin{cases} -x^2+8x-15\geq 0, \\ x-5\geq 0 \end{cases}$. Resolvendo este sistema, descobrimos que $x = 5$. Isso significa que o domínio de definição dessa equação irracional consiste em apenas um número 5, que é a raiz da equação. Assim, para resolver equações irracionais, é aconselhável primeiro encontrar o domínio de sua definição e, em seguida, usar os métodos de remoção de raízes. Porque às vezes as raízes são facilmente obtidas no processo de encontrar o domínio de definição de uma equação irracional.

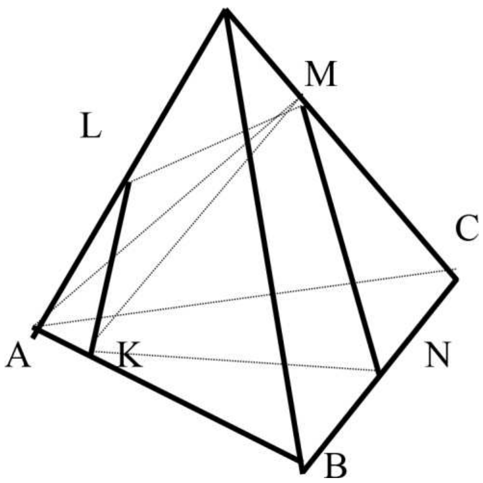
Nos métodos de ensino de geometria, há muito se conhece uma abordagem fusionista para ensinar aos alunos fatos e conceitos geométricos, que envolve o estudo conjunto de figuras planimétricas e estereométricas. A eficácia desta abordagem reside no fato de que ela contribui amplamente para a formação da capacidade dos alunos, de forma independente, com base no material aprendido anteriormente, descobrir novos conhecimentos. Vamos ilustrar isso com um exemplo de estudo das propriedades das medianas de um triângulo e de um tetraedro. Como se sabe, as medianas de um triângulo se cruzam em um ponto e o dividem em uma proporção de 2:1, contando a partir dos vértices, as medianas de um tetraedro também se cruzam em um ponto e o dividem em uma proporção de 3:1, contando a partir dos vértices. Em livros clássicos de geometria para os anos 7 a 9 e 10 a 11, presume-se que esses fatos são comunicados diretamente aos alunos, e que eles se lembram, às vezes inconscientemente. Daí os problemas na aplicação desses fatos na solução de problemas geométricos de natureza planimétrica e estereométrica.

O estudante não faz muito esforço para assimilar esses fatos. Sua consciência não apresenta atividade mental adequada para que esse fato passasse por certas etapas de sua assimilação. Para estimular a atividade mental dos alunos, alguns professores usam ativamente métodos de ensino visual, por exemplo, uma imagem de um triângulo arbitrário é construída na tela do computador e os pontos médios de seus lados são marcados, em seguida, suas medianas são desenhadas. Conforme as medianas são plotadas, os alunos notam que as duas medianas se cruzam em um ponto, verifica-se que a terceira mediana do triângulo também passou por este ponto. Além disso, o professor propõe mudar a forma do triângulo para outra e ver se a mediana desse triângulo tem essa propriedade? Os alunos descobrem com interesse que as medianas desse triângulo também se cruzam em um ponto. Assim, com a ajuda de exemplos simples, levamos nossos alunos a apresentar uma ideia hipotética de que as medianas de um triângulo arbitrário se cruzam em um ponto. Agora é importante que o professor mantenha e aumente esse interesse para passar a comprovar esse fato. Deve-se ser estrito, mas não seco.

Cada aluno deve adentrar na ideia de comprovar esse fato para compreender seu conteúdo de forma mais profunda e ampla. No processo de provar este teorema, os alunos descobrem outro fato importante que é novo para eles, que as medianas de um triângulo são divididas por seu ponto de intersecção na proporção 2:1, contando a partir do vértice. Com o objetivo de uma percepção mais consciente do teorema, os alunos podem ser oferecidos para resolver os seguintes problemas planimétricos: Em um triângulo regular ABC medianas $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$, cruzando em um ponto O. Prove que triângulo é igual a triângulo. Pode-se argumentar que os triângulos OBA_1, OCA_1, OAB_1, OAC_1 são iguais um ao outro. Se para pintar um triângulo OCB_1 23 gramas de tinta amarela são necessários, quanto dessa tinta é necessária para pintar todo o triângulo? Esta etapa de assimilação de qualquer fato matemático é necessária, até porque no processo de ensinar crianças a provar teoremas matemáticos, forma-se uma ideia importante de que não basta encontrar algum padrão, mesmo na vida real é necessário substanciar seu direito de existir e aplicar nas atividades. Como já observamos, o análogo espacial de um triângulo é um tetraedro - um poliedro definido por quatro pontos que não estão no mesmo plano e quatro triângulos com vértices nesses pontos. Cada triângulo tem um centro de gravidade - o ponto de intersecção de suas medianas.

A mediana de um tetraedro é um segmento de linha que conecta seu vértice ao centro de gravidade da face oposta. Usando os recursos das tecnologias de computador, é possível convencer visualmente os alunos da ideia hipotética de que as medianas de um tetraedro se cruzam em um ponto, que eles podem propor no processo de familiarização com um conceito como a mediana de um tetraedro. Em livros escolares de geometria para as séries 10-11, esse fato não é estudado como um teorema separado, mas pode ser proposto como um problema separado, por exemplo, ao estudar os fundamentos do método de coordenadas vetoriais. No processo de resolver este problema, os alunos chegarão à descoberta de um novo resultado mais forte que as medianas de um tetraedro não apenas se cruzam em um ponto, mas também o dividem em uma proporção de 3:1, contando a partir dos vértices.

Para uma compreensão mais aprofundada deste fato e para a formação da capacidade dos alunos de fazer descobertas, de revelar fatos ocultos tanto na tarefa em si quanto no decorrer de sua solução, a seguinte tarefa contribuirá: O tetraedro ABCD é dado. Os pontos K e M são retirados em suas bordas AB e CD para que AK:KB = DM:MC ≠ 1. Um plano é desenhado através dos pontos K e M, dividindo o tetraedro em dois poliedros de volumes iguais. Em que aspecto esse plano divide a borda BC?



O poliedro localizado sob o plano de corte MLNK pode ser dividido em três tetraedros AMKN, AMCN, ALMK. O volume de cada tetraedro pode ser representado como uma sexta parte do módulo de produtos mistos $\mathrm{mod}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AK})$, $\mathrm{mod}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN})$, $\mathrm{mod}(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK})$. Se colocarmos isso $(AB,\ K) = (DC,\ M) = \lambda$, $(AB,\ K) = (DC,\ M) = x$, para

$$\overrightarrow{KB} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AK} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{MC} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}),$$

$$\overrightarrow{LA} = \frac{1}{1+x}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{x}{1+x}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DM} = \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}),$$

$$\overrightarrow{NB} = \frac{1}{1+x}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}), \quad \overrightarrow{CN} = \frac{x}{1+x}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \ .$$

Levando em consideração essas relações e as propriedades do produto misto, obtemos que

$$\mathrm{mod}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2(1+x)}\mathrm{mod}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}),$$

$$\mathrm{mod}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) = \frac{x}{(1+\lambda)(1+x)}\mathrm{mod}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}),$$

$$\mathrm{mod}(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}) = \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2(1+x)}\mathrm{mod}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \ .$$

The

$$0.5\,\mathrm{mod}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \mathrm{mod}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AK}) + \mathrm{mod}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}) + \mathrm{mod}(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AK}),$$

então x =1. Isso significa que o plano KLMN não apenas cruza a aresta BC, mas a divide ao meio.

Em termos da formação da capacidade de fazer novas descobertas e aplicar o produto misto de vetores para resolver problemas geométricos escolares e da capacidade de compor novos problemas, o seguinte exercício matemático é dado: Um tetraedro ABCD é dado, o volume do qual é 1. Plano α cruza as arestas DA, DB, AC, CB respectivamente nos pontos K, L, P, M de tal modo que $DK = 2KA$, $LB = 2DL, CM = 3MB$. Encontre o volume da pirâmide. Faça possíveis generalizações do problema.

O escopo da busca por uma solução para o problema deve ser estreitado focalizando a atenção dos estagiários na possibilidade de dividir uma pirâmide quadrangular em dois tetraedros e aplicando o módulo do produto misto de vetores para o cálculo dos volumes dos tetraedros resultantes. A capacidade de dividir uma figura em suas partes constituintes contribui para a formação da capacidade de dividir o todo em partes; use a análise ao procurar uma solução para um problema específico. Nesse caso, o todo é uma pirâmide quadrangular LABMP, e suas partes são dois tetraedros ABLP e BMPL. A atualização da aplicação expedita do módulo do produto misto de vetores ao cálculo dos volumes dos tetraedros contribui para a formação da capacidade de aplicação do produto misto na solução de problemas geométricos escolares. A capacidade dos formandos de aplicar um produto misto de vetores ao cálculo dos volumes dos tetraedros permite obter uma série de relações úteis: $V_1 = \left|(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP})\right|/6$, $V_2 = \left|(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BL})\right|/6$, $V_{DABC} = \left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|/6$. As V_{DABC} =1, то $\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$=6.

A implementação de tal raciocínio lógico gera entre os alunos o desejo de expressar produtos mistos de vetores $\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BL}$ através do produto misto de vetores básicos $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. As expressões do produto misto de um tripleto de vetores através do produto misto de outro depende da capacidade dos estudantes de representar alguns vetores como uma combinação linear de outros; aplicar propriedades do produto misturado ao seu cálculo. Um importante significado didático desta tarefa também reside no fato de que na fase de cálculo do coeficiente α vetores colineares $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ os estudantes estão aprimorando sua capacidade de aplicar a condição necessária e suficiente para a coplanaridade de vetores em situações específicas. Usando a condição do problema e as propriedades do tetraedro, pode-se mostrar que

$$\overrightarrow{AL}=\frac{\overrightarrow{AB}\ +\ 2\overrightarrow{AD}}{3},\qquad \overrightarrow{BL}=\frac{2(\overrightarrow{AD}\ -\ \overrightarrow{AB})}{3},\qquad \overrightarrow{BM}\ =\ \frac{\overrightarrow{AC}\ -\ \overrightarrow{AB}}{4}\ .$$

Para determinar o coeficiente α vetores colineares $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ você pode usar o fato de que o trabalho misto ($\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{LM}$) dos vetores $\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{LM}$ é igual a 0. Como

$$\overrightarrow{PL}=\frac{\overrightarrow{AB}\ +\ 2\overrightarrow{AD}\ -\ 3\alpha\overrightarrow{AC}}{3},$$

$$\overrightarrow{PM}\ =\frac{3\overrightarrow{AB}\ +\ (1\ -\ 4\alpha)\overrightarrow{AC}}{4},\qquad \overrightarrow{LM}\ =\frac{15\overrightarrow{AB}\ +\ 3\overrightarrow{AC}\ -\ 8\overrightarrow{AD}}{12},$$

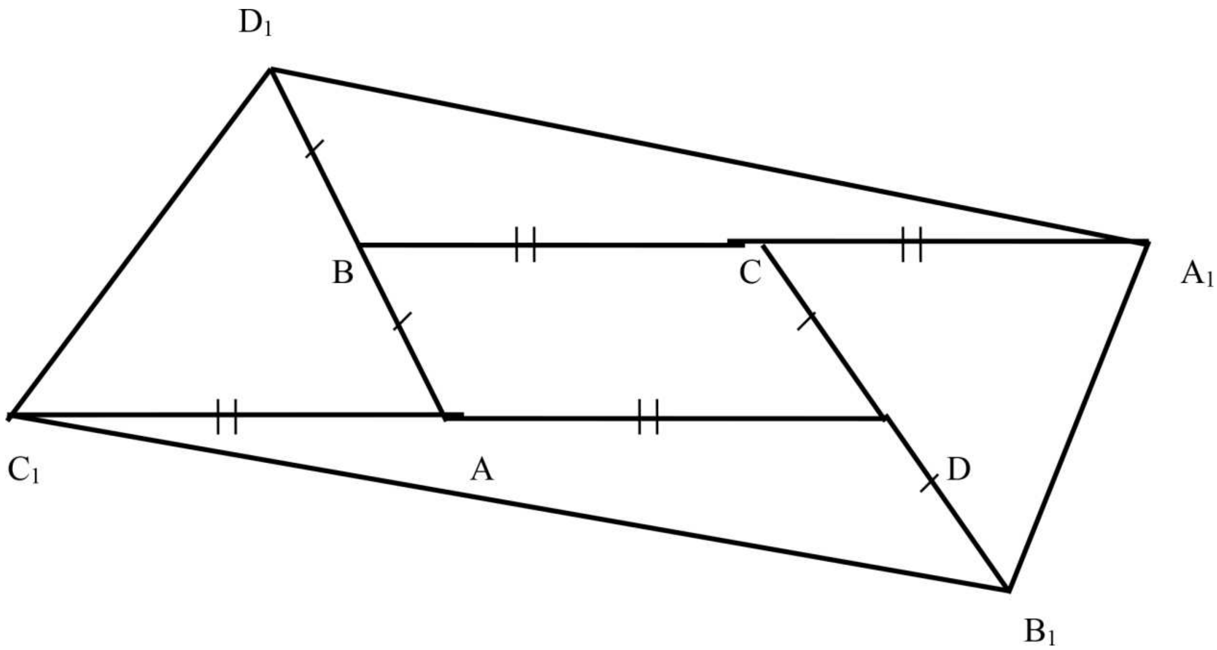
então o produto misto de vetores ($\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{LM}$) é igual a $\frac{5-20\alpha}{72}$. Por isso $\alpha=\frac{1}{4}$. Então, nós entendemos $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}/4$, $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}\ -\ \overrightarrow{AC}/4$.

Usando as propriedades do produto misto de vetores, encontramos o volume do tetraedro ABLP (1/6) e o volume do tetraedro BMPL (1/8), e então, conectando as partes em um único todo, encontramos o volume da pirâmide quadrangular LABMP.

A fim de formar uma percepção mais consciente do produto misto de vetores e desenvolver a capacidade dos alunos de aplicar as propriedades do produto misto de vetores para resolver problemas geométricos, é aconselhável considerar tarefas do seguinte tipo:

Nos raios $AB,\ BC,\ CA$, contendo os lados correspondentes do triângulo ABC , pontos tomados $C_1,\ B_1,\ A_1$, de tal modo que $AC_1=AB,\ \ CA_1=BC,\ \ AB_1=CA$. Encontre a proporção da área de um triângulo ABC para a área do triângulo $A_1B_1C_1$.

Em primeiro lugar, deve-se notar que as quantidades e relações entre elas dadas neste problema são invariantes por afinidade. Nesta fase de resolução do problema, os futuros professores de matemática desenvolvem a capacidade de selecionar objetos invariantes afins. A presença de tais objetos em um problema permite que ele seja especializado, o que pode servir de base para encontrar sua solução ótima. A concretização desse problema leva a um novo, que é obtido a partir da substituição prévia de um triângulo arbitrário por um equilátero. Se o triângulo $A'B'C'$ é regular, então o triângulo $A_1'B_1'C_1'$ também é regular e é composto por três triângulos iguais $A'B'C_1'$, $C'B'A_1'$, $A'C'B_1'$ e o triângulo propriamente dito $A'B'C'$. Se o comprimento do lado do triângulo for regular $A'B'C'$ tomado como 1, então, pode-se mostrar que a área do triângulo $A_1'B_1'C_1'$, será 7 vezes a área do triângulo ABC. Uma propriedade notável deste problema não é apenas que ele admite uma solução ótima pelo método das transformações afins, mas também que admite generalização, e a generalização deste problema pode ser realizada em duas direções: uma delas está associada a transição de um conjunto para outro mais amplo; contendo o conjunto dado como um subconjunto (do triângulo ao quadrilátero, do quadrilátero ao pentágono etc.), e a outra direção está associada com a transição do paralelogramo para o paralelepípedo por analogia. A capacidade do futuro professor de matemática de utilizar o método da generalização para compor novos problemas, tarefas inter-relacionadas com esta, é uma das condições necessárias para indicar a sua disponibilidade para organizar a atividade criativa. Este problema pode ser generalizado para o caso de quadrângulos da seguinte forma: Nos raios AB, BC, CD, DA contendo os lados correspondentes do paralelogramo $ABCD$, tomados os pontos D_1, A_1, B_1, C_1 de tal modo que $BD_1 = AB$, $CA_1 = BC$, $DB_1 = CD$, $AC_1 = AD$. Encontre a proporção da área de um paralelogramo $ABCD$ para a área do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$.



Em primeiro lugar, ao se organizar a busca de uma solução para este problema, é necessário chamar a atenção dos alunos para a possibilidade de determinar o tipo desse quadrilátero. Não pertence, como este, à classe dos paralelogramos? Após um raciocínio simples, podemos descobrir que o quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ - paralelogramo que consiste em um paralelogramo $ABCD$ e quatro triângulos com a mesma área que este paralelogramo. Isso significa que a área do paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$ é cinco vezes a área do paralelogramo $ABCD$. Este problema pode ser generalizado para o caso de um quadrângulo arbitrário $ABCD$: nos raios $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ tomados os pontos $D_1,\ A_1\ ,B_1,\ C_1$ de modo que $BD_1 = AB,\ \ CA_1 = BC,\ \ DB_1 = CD,\ \ AC_1 = AD$. Encontre a área do quadrilátero resultante $A_1B_1C_1D_1$ se a área do quadrângulo dado $ABCD$ é igual a S.

Sabe-se que um tetraedro é um análogo espacial de um triângulo e um paralelepípedo é um análogo espacial de um paralelogramo. Usando uma analogia, uma série de problemas espaciais, que são generalizações de problemas planimétricos anteriores, podem ser compilados, por exemplo,

1. Nos raios $AB,\ BC,\ CD,\ DA$, contendo as bordas do tetraedro $ABCD$ tomados os pontos $D_1,\ A_1\ ,B_1,\ C_1$ de forma que $BD_1 = AB,\ \ CA_1 = BC,\ \ DB_1 = CD,\ \ AC_1 = AD$. Encontre a razão do volume de um tetraedro $ABCD$ ao volume do tetraedro $A_1B_1C_1D_1$.

2. Nos raios

$$BA,\ B_1B,\ C_1C\ ,\ CD,\ AA_1,\ C_1C,\ CD,\ AA_1,\ A_1\ B_1,\ D_1C_1,\ DD_1\ ,$$

contendo as bordas correspondentes do paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, tomados os pontos $M\ ,\ N,\ P,\ Q,\ M_1,N_1,\ P_1,\ Q_1$ de forma que

$$AM = BA,\ BN = B_1B,\ CP = C_1C,\ DQ = CD,\ A_1M_1 = AA_1,$$
$$B_1N_1 = A_1B_1,\ C_1P_1 = D_1C_1,\ D_1Q_1 = DD_1$$

. Prove que o volume de um politopo $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ seja cinco vezes o volume de um paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Uma das maneiras de encontrar a solução ótima para esses problemas é baseada no teorema do significado geométrico do produto misto de três vetores não coplanares. De acordo com este teorema, descobrimos que V_{ABCD} = mod($\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1}$)/6. Desde que os vetores $\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1}$ possam ser expandidos em vetores não coplanares $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ da seguinte maneira:

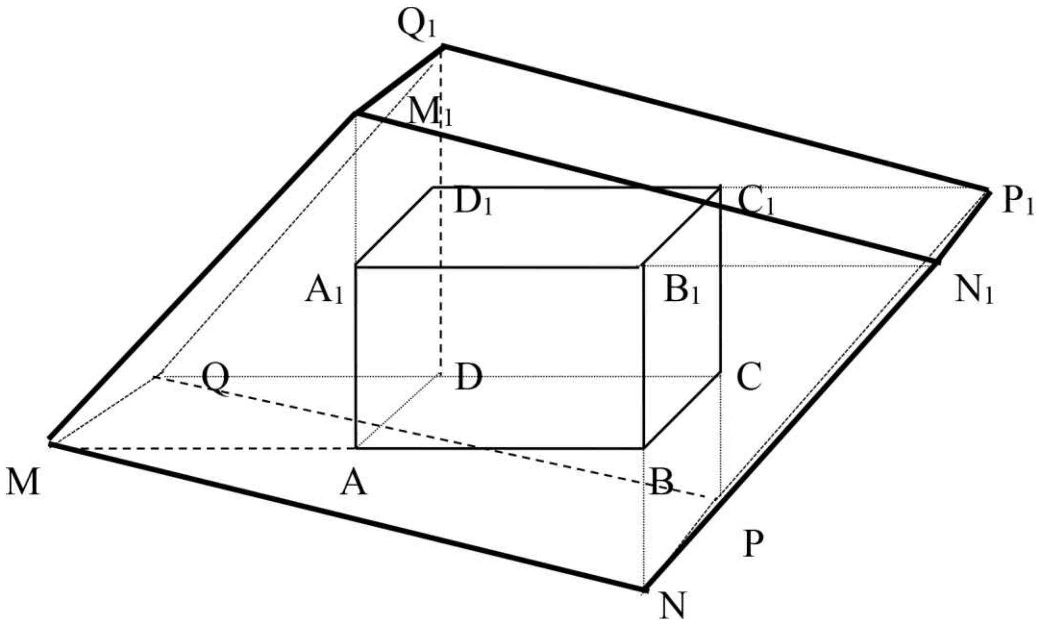
$$\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{C_1D_1} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{C_1A_1} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD},$$

então produto misto $(\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1})$ dos vetores $\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1}$ será expresso através do produto misto de vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ da seguinte forma:

$$(\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1}) = -15\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}).$$

Isso significa que o volume do tetraedro $A_1B_1C_1D_1$ é 15 vezes o volume deste tetraedro.

A fim de provar que a relação do volume do paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ao volume do paralelepípedo $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ seja igual a 1:5, é necessário conhecer a decomposição de vetores $\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM_1}$ por vetores não coplanares $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}$.



A partir da condição do problema, levando em consideração as regras de adição de vetores, obtemos que os vetores $\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM_1}$ relacionado a vetores $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}$ pelas seguintes proporções: $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA_1}$. Portanto, levando em consideração as propriedades do produto misto de vetores, temos

$(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM_1}) = -5(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1})$.. Isso significa que o volume do paralelepípedo $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ é cinco vezes o volume de um paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ao buscar uma solução ótima para um problema geométrico, é importante que os futuros mestres da educação matemática tenham desenvolvido a capacidade de representar um meio-plano, o interior de um polígono, o interior de um círculo e outras figuras geométricas com modelos algébricos apropriados. Na formação desta habilidade entre os alunos, problemas do seguinte tipo podem ser jogados: Dentro de um triângulo equilátero, um ponto arbitrário é tomado, a partir do qual perpendiculares são baixados para todos os seus lados. Prove que a soma dos comprimentos dessas perpendiculares é igual ao comprimento da altura do triângulo. A procura de uma solução para este problema deve começar por centrar a atenção dos formandos na utilização de modelos algébricos das imagens geométricas correspondentes. No momento em que este problema for estudado, os futuros mestres em educação pedagógica (perfil "Educação matemática") deverão ter a capacidade de vincular essas figuras geométricas de forma canônica. A escolha de um sistema de coordenadas canônico contribui para uma redução significativa na atividade computacional. Neste caso, a escolha canônica do sistema de coordenadas se deve ao fato de que o centro de qualquer um dos lados do triângulo pode ser tomado como origem do sistema de coordenadas, por exemplo, tomamos o meio O do lado AB. Como o primeiro vetor coordenado, tomamos o vetor unitário codirecional com o vetor $\overrightarrow{OB}$, e como o segundo vetor coordenado, tomamos o vetor unitário codirecional com o vetor $\overrightarrow{OC}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o comprimento do lado de um triângulo equilátero é 2. Então, em relação a um PDSK especialmente selecionado, os pontos A, B, C terão as seguintes coordenadas: $A(-1;0),\quad B(0;\sqrt{3}),\quad C(1;0)$. Com M (x, y) sendo o ponto interior do triângulo. Usando as coordenadas dos pontos A, B, C, você pode desenhar as equações das linhas contendo os lados deste triângulo. Então, o interior do triângulo ABC será determinado pelo sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ \sqrt{3}x - y + \sqrt{3} \geq 0, \\ \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} \leq 0. \end{cases}$$

Usando a fórmula para calcular a distância de um ponto a uma linha, você pode mostrar que

$$\rho(M, AC) = |y|, \quad \rho(M, BC) = \frac{|\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}|}{2}, \quad \rho(M, AB) = \frac{|\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}|}{2}$$

Levando em consideração as desigualdades acima, que são satisfeitas pelas coordenadas do ponto M, obtemos que

$$\rho(M, AC) = y, \quad \rho(M, BC) = \frac{-\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}}{2}, \quad \rho(M, AB) = \frac{\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}}{2}$$

De onde $\rho(M, AC) + \rho(M, BC) + \rho(M, AB) = \sqrt{3}$. Como o comprimento da altura do triângulo é igual ao mesmo, significa que o requisito do problema foi atendido. No decurso da resolução de tais problemas, os futuros professores de matemática dominam não apenas os métodos de estabelecer uma correspondência um-a-um entre as figuras geométricas e seus modelos algébricos, mas, em primeiro lugar, dominam os métodos de sua aplicação na busca pelo ótimo solução de um problema geométrico específico de um tipo de escola.

A eficácia do impacto do ambiente educacional na saúde dos alunos do ensino fundamental é determinada pelas atividades sistemáticas de saúde. O processo de formação de uma atitude consciente para com a própria saúde requer a combinação de componentes de informação e motivação com as atividades práticas dos alunos, o que os ajudará a adquirir as habilidades e hábitos necessários para a preservação da saúde. (ROZLUTSKA *et al.,* 2020)

Conclusão

Assim, o aspecto metodológico da tarefa material apresentada neste artigo, destinada a preparar futuros mestres da educação pedagógica (perfil “Educação Matemática”) para a atividade criativa, permite-nos destacar a objetividade da atividade educativa como mecanismo básico que garante a eficácia da formação de competência, iniciativa e criatividade. Todos esses mecanismos atuam em unidade e têm um impacto positivo no desenvolvimento da atividade criativa no processo educativo. Foi revelado que no processo de aprendizagem da resolução de problemas geométricos incluídos no sistema desenvolvido, os alunos demonstram indicadores mais elevados do nível de formação da atividade criativa.

REFERÊNCIAS

ANDREEV, V. I. **Dialectics of education and self-education of a creative personality**: Fundamentals of creativity pedagogy. Kazan: Publishing house of Kazan University, 1988.

DAVYDOV, V. V. The concept of humanization of Russian primary education (the need and possibility of creating an integral system of developing primary education). **Psychological Science and Education**, v. 5, n. 2, 2000.

DOROFEEV, S. N. *et al*. Formation of research competencies of students in a modern mathematics lesson. **Modern High Technologies**, n. 10, p. 181-185, 2018.

DOROFEEV, S. N. **Theory and practice of forming the creative activity of future teachers of mathematics in a pedagogical university**. 2000. Dissertation (Doctorate) – Moscow Pedagogical State University, Moscow, 2000.

GLAZKOV, Y. A.; EGUPOVA, M. V. Geometry assignments for the formation of universal educational activities in basic school. **Mathematics at school**, n. 2, p. 24-31, 2017.

KALINKINA, T. M. **Dynamic tasks as a means of improving the process of teaching geometry in high school**. Saransk: Publishing house of the Mordovian State Pedagogical Institute. 1995.

KALMYKOVA, Z. I. Understanding of educational material by schoolchildren. **Bulletin of Practical Psychology of Education**, n. 1, p. 21-25, 2013.

LERNER, I. **Features of teaching children with disabilities in mathematics lessons EU Lisitsa, Deputy Director for SD, MBOU "School number 66**". BBK 74.262. 21 M34, 24. 2016.

LODATKO, E. A. Philosophy of teaching mathematics as a semantic component of the modern educational space. **TSU Science Vector: Series: Pedagogy, Psychology**, n. 1, p. 107-111, 2015.

MENCHINSKAYA, N. A. Problems of education, upbringing and mental development of the child. Moscow: Psychol.-social. IN-T, 2004.

MUDRIK, A. V. **Human socialization**. 2004.

PODLASY, I. P. **Pedagogy**: 100 questions-100 answers: textbook. Manual for stud. Higher. Study Institutions. Moscow: Vlados-Press Publishing House, 2001. 368 p.

ROZLUTSKA, G. M. *et al*. Educational traditions of healthy lifestyle of pupils of public schools of transcarpathia (1919–1939). **Medical Education**, n. 2, p. 127-132, 2020. DOI: 10.11603 / me.2414-5998.2020.2.11162

SAMYGIN, S. I.; STOLYARENKO, L. D. **Psychology and pedagogy**. 2012.

TEMERBEKOVA, A. A. *et al*. **Theoretical foundations of personality development in the context of interactive learning technologies**. 2013.

UTEEVA, R. A. Substantive and methodological features of training masters of mathematics education in Russia. **Science and Education a New Dimension**, t. 3, v. 45, n. 22, p. 14-17, 2015.

UTEEVA, R. A.; ORAZYMBETOVA, G. S. Actual problems of the implementation of the stochastic content line in the school mathematics course. Letters to the Issue. **Offline: Electronic Scientific Journal**, n. 11, p. 1908-1908, 2012.

VAGANOVA, O. I. *et al*. Personally-oriented professional education. **Baltic Humanitarian Journal**, v. 9, n. 2, p. 112-115, 2020.

VYGOTSKY, L. S. **Pedagogical psychology**. 2007.

WINTER, I. A. Education strategy: opportunities and reality. Knowledge. Understanding. **Skill**, n. 1, 2006.

Como referenciar este artigo

DOROFEEV, S. N.; SHICHIYAKH, R. A.; KHASIMOVA, L. N. Desenvolvimento de habilidades de atividade criativa de estudantes em estabelecimentos de ensino superior. **Revista on line de Política e Gestão Educacional**, Araraquara, v. 25, n. esp. 2, p. 887-904, maio 2021. e-ISSN:1519-9029. DOI: https://doi.org/10.22633/rpge.v25iesp.2.15274

Submetido em: 20/01/2021
Revisões requeridas em: 18/03/2021
Aprovado em: 25/04/2021
Publicado em: 01/05/2021