

**PROMOVENDO A COMPREENSÃO DAS SÉRIES GEOMÉTRICAS INFINITAS
POR MEIO DE UM MODELO VISUAL DE ÁREAS: UM PROJETO DIDÁTICO
BASEADO NA TEORIA APOS**

**FOMENTAR LA COMPRENSIÓN DE LAS SERIES GEOMÉTRICAS INFINITAS
MEDIANTE UN MODELO VISUAL DE ÁREAS: UN DISEÑO DIDÁCTICO BASADO
EN LA TEORÍA APOS**

**FOSTERING UNDERSTANDING OF INFINITE GEOMETRIC SERIES THROUGH A
VISUAL AREA MODEL: A DIDACTIC DESIGN BASED ON APOS THEORY**



Pham Sy NAM¹
e-mail: psnam@sgu.edu.vn



Pham Thi Thanh TU²
e-mail: phamtu@sgu.edu.vn



Nguyen Huu HAU³
e-mail: nguyenuhuu@hdu.edu.vn



Tran Thuy NGA⁴
e-mail: ngatt@gesd.edu.vn

Como referenciar este artigo:

Nam, P. S., Tu, P. T. T., Hau, N. H., & Nga, T. T. (2026). Promovendo a compreensão das séries geométricas infinitas por meio de um modelo visual de áreas: um projeto didático baseado na teoria APOS. *Revista on line de Política e Gestão Educacional*, 30(esp2), e026074. <https://doi.org/10.22633/rpge.v30iesp2.21364>



| Submetido em: 26/04/2026
| Revisões requeridas em: 02/05/2026
| Aprovado em: 12/06/2026
| Publicado em: 01/08/2026

Editor: Prof. Dr. Sebastião de Souza Lemes

Editor Adjunto Executivo: Prof. Dr. José Anderson Santos Cruz

¹ Universidade de Saigon, Ho Chi Minh – Vietnã. Professor Associado da Faculdade de Matemática e Aplicações.

² Universidade de Saigon, Ho Chi Minh – Vietnã. Doutora em Educação Matemática, Faculdade de Matemática e Aplicações.

³ Universidade de Hong Duc, Thanh Hóa – Vietnã. Doutor, Faculdade de Ciências Naturais.

⁴ Instituto Nacional de Ciências da Educação do Vietnã, Hanói, Vietnã. Faculdade de Matemática e Aplicações.

RESUMO: Este estudo investiga como um modelo visual de área (subdivisão iterativa do quadrado unitário) influencia a construção, pelos alunos, da soma de uma série geométrica infinita, e esclarece os mecanismos cognitivos envolvidos. Seguindo uma abordagem de engenharia didática, 52 alunos do 11º ano preencheram uma ficha de exercícios com quatro questões. Os dados das fichas de exercícios e das entrevistas semiestruturadas foram analisados utilizando codificação baseada no APOS. O modelo visual pareceu facilitar a conclusão (36,5% dos alunos previram corretamente o limite $1/3$ antes da instrução formal) e o encapsulamento (61,5% alcançaram o nível Objeto). No entanto, a generalização para razões arbitrárias continuou sendo um desafio (apenas 34,6% alcançaram o nível Esquema). O estudo amplia a teoria APOS ao demonstrar que a totalidade visual por si só pode desencadear a conclusão e o encapsulamento, mesmo sem domínio algébrico completo. Ele também oferece um refinamento da decomposição genética para séries geométricas infinitas, destacando a necessidade de suporte adicional na generalização. É fornecido um projeto instrucional pronto para uso.

PALAVRAS-CHAVE: Séries geométricas infinitas. Teoria APOS. Modelo de área. Engenharia didática. Representação visual.

RESUMEN: Este estudio investiga cómo un modelo visual de área (subdivisión iterativa del cuadrado unitario) influye en la construcción que hacen los estudiantes de la suma de una serie geométrica infinita, y aclara los mecanismos cognitivos implicados. Siguiendo un enfoque de ingeniería didáctica, 52 estudiantes de 11.º grado completaron una hoja de ejercicios de cuatro preguntas. Los datos de las hojas de trabajo y las entrevistas semiestructuradas se analizaron utilizando una codificación basada en APOS. El modelo visual pareció facilitar la finalización (el 36,5 % de los estudiantes predijo correctamente el límite $1/3$ antes de la instrucción formal) y la encapsulación (el 61,5 % alcanzó el nivel Objeto). Sin embargo, la generalización a razones arbitrarias siguió siendo un desafío (solo el 34,6 % alcanzó el nivel Esquema). El estudio amplía la teoría APOS al demostrar que la totalidad visual por sí sola puede desencadenar la finalización y la encapsulación, incluso sin un dominio algebraico completo. También ofrece un refinamiento de la descomposición genética para series geométricas infinitas, destacando la necesidad de andamiaje adicional en la generalización. Se proporciona un diseño instruccional listo para usar.

PALABRAS CLAVE: Series geométricas infinitas. Teoría APOS. Modelo de área. Ingeniería didáctica. Representación visual.

ABSTRACT: This study investigates how a visual area model (iterative unit square subdivision) influences students' construction of the sum of an infinite geometric series, and clarifies the cognitive mechanisms involved. Following a didactic engineering approach, 52 Grade 11 students completed a four-question worksheet. Data from worksheets and semi-structured interviews were analyzed using APOS-based coding. The visual model appeared to facilitate completion (36.5% of students correctly predicted the limit $1/3$ before formal instruction) and encapsulation (61.5% reached the Object level). However, generalization to arbitrary ratios remained challenging (only 34.6% achieved Schema). The study extends APOS theory by demonstrating that visual totality alone can trigger completion and encapsulation, even without full algebraic mastery. It also offers a refinement of the genetic decomposition for infinite geometric series, highlighting the need for additional scaffolding in generalization. A ready-to-use instructional design is provided.

KEYWORDS: Infinite geometric series. APOS theory. Area model. Didactic engineering. Visual representation.

INTRODUÇÃO

O conceito de soma de uma série geométrica infinita é altamente abstrato e representa um desafio para os alunos, em grande parte devido ao conflito entre diferentes fundamentos do pensamento matemático (Nam et al., 2024). O pensamento algébrico tradicional gira, em geral, em torno de objetos que são “finitos”, “discretos” e “estáticos”, enquanto o conhecimento de limites e somas infinitas requer um pensamento analítico caracterizado por “infinito”, “continuidade” e “variação” (Nam, 2013). Essa natureza “infinita” e “dinâmica” constitui uma barreira central: a soma de uma série geométrica infinita torna-se extremamente difícil de compreender se abordada apenas por meio de métodos estáticos convencionais (Nam et al., 2024). Quando os alunos se deparam com conceitos matemáticos de nível mais avançado, como a soma de uma série geométrica infinita (envolvendo limites, infinito e fórmulas em forma fechada), frequentemente têm dificuldade em transformar suas estruturas cognitivas. Eles tendem a aplicar algoritmos mecanicamente, em vez de desenvolver uma compreensão conceitual profunda (Arnon et al., 2014). Um obstáculo fundamental reside na noção intuitiva de infinito potencial — ver o infinito como um processo contínuo e sem fim. Essa intuição impede que os alunos aceitem o infinito real — ver um processo infinito como uma totalidade completa e estática (Fischbein, 2001; Villabona et al., 2024).

Para superar essas barreiras cognitivas, este estudo propõe o uso de um modelo visual de área — especificamente, uma tarefa iterativa de subdivisão e coloração do quadrado unitário — como atividade introdutória. Esses modelos geométricos iterativos infinitos (por exemplo, o triângulo de Sierpiński, quadrados aninhados) fornecem um contexto concreto para que os alunos realizem ações em processos infinitos, comparem estágios finitos com o estado limite e explorem diferentes facetas do conceito de infinito (Villabona et al., 2024).

Apesar do potencial dos modelos visuais, poucos estudos investigaram sistematicamente como um modelo de área iterativo pode apoiar a transição de Ação para Objeto no caso específico da soma de uma série geométrica infinita. Em particular, os mecanismos de conclusão e encapsulamento foram discutidos teoricamente (Villabona et al., 2024), mas raramente examinados empiricamente em um contexto de ensino médio com uma representação visual limitada. Além disso, ainda não está claro se uma totalidade visual por si só pode desencadear o encapsulamento sem a necessidade de manipulações algébricas formais de limites. Vários estudos utilizaram *softwares* de geometria dinâmica ou o PowerPoint para criar visualizações (por exemplo, Nam et al., 2024), mas não analisaram os processos cognitivos subjacentes por meio de uma estrutura como a APOS. Este estudo aborda essas lacunas

aplicando a teoria APOS, dentro de uma estrutura didática de engenharia, a um modelo de área de quadrado unitário.

Este estudo tem como objetivo elaborar e avaliar uma atividade didática baseada na teoria APOS (Ação–Processo–Objeto–Esquema) para ajudar os alunos a construir uma compreensão sólida da soma de uma série geométrica infinita. Ao aplicar uma decomposição genética da teoria APOS, elaboramos estratégias pedagógicas que auxiliam os alunos a interiorizar processos e encapsulá-los em objetos, passando assim de uma visão da série geométrica infinita como uma “Ação” ou “Processo” para uma “Totalidade” e, finalmente, para um “Objeto” estático. O estudo aborda duas questões de pesquisa:

RQ1: De acordo com a teoria APOS, quais estruturas mentais (Ação, Processo, Objeto, Esquema) e mecanismos cognitivos (internalização, encapsulamento, conclusão) permitem que os alunos operem com sucesso sobre entidades infinitas ao aprender a soma de uma série geométrica infinita?

RQ2: De que forma o uso de um modelo visual concreto de área (subdivisão iterativa do quadrado unitário) afeta a compreensão dos alunos sobre um processo infinito e seu mecanismo de conclusão, ajudando-os a alcançar uma concepção de Totalidade e de Objeto?

Este estudo traz três contribuições distintas:

Contribuição teórica: amplia a compreensão dos mecanismos de conclusão e encapsulamento no contexto de séries geométricas infinitas, fornecendo evidências empíricas de que uma totalidade visual delimitada pode desencadear a conclusão mesmo antes do ensino formal do conceito de limite, e de que o encapsulamento pode ocorrer apenas por meio do raciocínio visual para alguns alunos.

Contribuição prática: oferece um projeto didático pronto para uso e de baixo custo (uma ficha de exercícios com quatro questões baseada em um quadrado unitário) que conecta representações visuais, algébricas e de limite, podendo ser facilmente implementado em salas de aula do ensino médio.

Contribuição metodológica: demonstra a integração da engenharia didática com a teoria APOS, mostrando como a análise *a priori* (decomposição genética) pode orientar a concepção de tarefas e como a comparação *a posteriori* com os resultados observados pode refinar o quadro teórico.

REFERENCIAL TEÓRICO

Teoria APOS: conceitos-chave e mecanismos

A teoria APOS é um modelo construtivista que busca explicar como os alunos constroem o conhecimento matemático por meio de estágios de estruturas mentais: Ação, Processo, Objeto e Esquema (Arnon et al., 2014). Dois mecanismos cognitivos fundamentais impulsionam essas transições:

Interiorização: transformar uma Ação (manipulação passo a passo guiada externamente) em um Processo (repetição mental, capacidade de reverter ou combinar etapas, sem necessidade de estímulos externos).

Encapsulamento: transformar um Processo em um Objeto estático (uma totalidade sobre a qual se pode agir). Para processos infinitos, isso frequentemente resulta em um Objeto Transcendente — uma entidade infinita completa que pode não herdar todas as propriedades de suas aproximações finitas (Brown et al., 2010).

Conclusão: um mecanismo específico para processos iterativos infinitos, em que o aluno visualiza a continuação infinita como um todo concluído (Villabona et al., 2024).

Esses mecanismos são frequentemente considerados essenciais para compreender como os alunos podem passar de cálculos finitos, passo a passo, para a soma na forma fechada de uma série geométrica infinita.

Embora a teoria APOS tenha sido aplicada a vários conceitos matemáticos, alguns dos mecanismos específicos de conclusão e encapsulamento para séries geométricas infinitas permanecem pouco explorados, particularmente no contexto do ensino médio. A maioria dos estudos existentes sobre a teoria APOS concentra-se em processos finitos ou no conceito de limite no cálculo, mas a transição do infinito potencial para o infinito real, no caso específico das séries geométricas, ainda não foi analisada sistematicamente sob a perspectiva de um modelo de área visual.

Dificuldades na aprendizagem da soma infinita de uma sequência geométrica

O conceito de soma de uma série geométrica infinita é altamente abstrato e representa um desafio para os alunos, em grande parte devido ao conflito entre diferentes fundamentos do pensamento matemático (Nam et al., 2024). O pensamento algébrico tradicional gira, normalmente, em torno de objetos que são “finitos”, “discretos” e “estáticos”, enquanto o conhecimento de limites e somas infinitas requer um pensamento analítico caracterizado por

“infinito”, “continuidade” e “variação” (Nam, 2013). Essa natureza “infinita” e “dinâmica” constitui uma barreira fundamental: a soma de uma série geométrica infinita torna-se extremamente difícil de compreender se abordada apenas por meio de métodos estáticos convencionais (Nam et al., 2024).

Em termos de estrutura cognitiva, a maior dificuldade para os alunos geralmente decorre de intuições relacionadas ao infinito potencial (Fischbein, 2001). Os alunos tendem a visualizar o infinito como um processo contínuo e incessante de movimento, sem ponto final, e essa mesma intuição se torna um obstáculo que os impede de aceitar o conceito de infinito real, ou seja, de ver um processo infinito como uma entidade estática ou uma totalidade completa (Fischbein, 2001; Villabona et al., 2024). Quando ficam presos no estágio do Processo e são incapazes de aplicar o mecanismo de encapsulamento para transformar esse processo infinito em um Objeto estático, os alunos não conseguem perceber o equilíbrio matemático no estado-limite (Artigue, 1998; Dubinsky et al., 2013). Uma consequência típica dessa barreira cognitiva é que os alunos frequentemente consideram o limite de uma série infinita (como a soma de uma série geométrica) meramente como uma “aproximação” que se aproxima cada vez mais, em vez de aceitá-lo como um valor exato (Artigue, 1998; Sierpinski, 1987).

A partir de uma perspectiva teórica diferente, Sfard (1991) e Gray & Tall (1994) explicaram a transição dos processos matemáticos para os conceitos por meio das teorias da reificação e do proceito. Nam et al. (2024) utilizaram esses modelos para interpretar seu ensino baseado no PowerPoint, argumentando que o modelo do triângulo dinâmico ajudou os alunos a passar da execução do processo iterativo (soma de triângulos menores) para o reconhecimento da soma total como uma entidade fixa ($\frac{1}{3}$). No entanto, a teoria da reificação não explica explicitamente os mecanismos específicos de conclusão e encapsulamento de processos infinitos, nem distingue entre infinito potencial e infinito real. A teoria APOS, com seus conceitos de conclusão e encapsulamento de processos infinitos (Villabona et al., 2024), oferece uma análise mais detalhada. O presente estudo, portanto, adota a teoria APOS para complementar e ampliar as percepções dos estudos baseados na reificação.

Além disso, a assimilação desse conceito também é dificultada pela natureza complexa dos Objetos Transcendentes (Brown et al., 2010; Villabona et al., 2024). Sob a perspectiva da teoria APOS, os objetos obtidos a partir do encapsulamento de um processo iterativo infinito não herdam necessariamente todas as propriedades dos estados finitos anteriores do processo (Brown et al., 2010). Os alunos frequentemente enfrentam dificuldades e conflitos cognitivos porque tentam projetar os atributos de estágios finitos intermediários (por exemplo, somas

parciais sempre menores que o limite) no estado-limite infinito final, o que os leva a rejeitar a igualdade exata (Ely, 2011). Essa desconexão dificulta que os alunos compreendam logicamente por que uma soma infinita de termos positivos (que nunca termina) pode, em última instância, convergir para uma soma completamente finita.

Além desses obstáculos cognitivos fundamentais, várias dificuldades específicas foram observadas na prática em sala de aula:

- Incompreensão do conceito de limite: os alunos confundem o limite das somas parciais com a própria soma parcial, acreditando que a soma infinita “se aproxima” do limite, mas nunca o “atinge”.
- Aplicação mecânica da fórmula: sem compreensão conceitual, os alunos memorizam $S = \frac{a}{1-r}$, mas não conseguem explicar por que isso funciona nem em que casos é válido (por exemplo, a condição $|r| < 1$).
- Incapacidade de generalizar: muitos alunos conseguem lidar com uma série numérica específica (por exemplo, $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$), mas têm dificuldade em abstrair a fórmula geral para a e r simbólicos.
- Falta de intuição visual: o ensino puramente simbólico muitas vezes não consegue fornecer uma base intuitiva para explicar por que a soma converge, deixando os alunos apenas com procedimentos mecânicos.

Em conjunto, essas dificuldades teóricas e empíricas sugerem uma forte necessidade de abordagens pedagógicas que preencham a lacuna entre operações finitas e a totalidade infinita — uma lacuna que modelos visuais, como o modelo de área, podem ajudar a preencher.

Pesquisas relacionadas a representações visuais para processos infinitos

Estudos anteriores destacaram o valor dos modelos visuais para o ensino de conceitos de infinito. Por exemplo, Ely (2011) mostrou que projetar propriedades finitas (como limitação ou simetria) em processos infinitos ajuda os alunos a visualizar o infinito real. Fischbein (2001) argumentou que modelos tácitos (intuições visuais ou físicas implícitas) podem tanto apoiar quanto dificultar a compreensão do infinito; modelos bem escolhidos podem servir como pontes para superar essa lacuna potencial.

Mais especificamente, Villabona et al. (2024) demonstraram que lidar com totalidades de processos infinitos (séries geométricas, decimais periódicos) requer a construção de

múltiplas “facetas” por meio de diferentes ações sobre a totalidade. As representações visuais oferecem uma base rica para tais ações — os alunos podem medir, comparar e prever, construindo a cada vez uma nova faceta da concepção do objeto. Em contrapartida, abordagens puramente simbólicas muitas vezes limitam os alunos a uma única faceta (manipulação algébrica), deixando a concepção do objeto frágil.

O presente estudo amplia essa linha de pesquisa ao propor um modelo de área concreto e de baixo custo (subdivisão iterativa de quadrados) que é particularmente adequado para a introdução de séries geométricas infinitas no ensino médio, antes do ensino formal de limites.

METODOLOGIA

Estrutura da pesquisa

Este estudo emprega uma abordagem didática da engenharia (Artigue, 2014), considerada particularmente adequada para projetar, implementar e analisar sequências de ensino com base em um quadro teórico preciso. Nosso projeto segue a teoria APOS e se concentra na decomposição genética (DG) do conceito “soma de uma série geométrica infinita”. A DG postula os estágios cognitivos (Ação, Processo, Objeto, Esquema) pelos quais se espera que os alunos passem durante a atividade. O processo de engenharia consiste em quatro fases: (1) análise preliminar, (2) concepção e análise *a priori*, (3) experimentação e (4) análise *a posteriori*. O quadro de engenharia didática (DE) não prescreve um único tipo de análise de dados. Assim, coletamos dados quantitativos e qualitativos. Os dados quantitativos (percentuais de alunos em cada nível do APOS) foram obtidos a partir das fichas de exercícios. Os dados qualitativos (justificativas escritas pelos alunos e transcrições das entrevistas) foram analisados para identificar os mecanismos cognitivos (interiorização, conclusão, encapsulamento) e para ilustrar respostas típicas para cada nível do APOS. Essa abordagem mista é consistente com estudos anteriores de DE que combinam previsões *a priori* com comparações *a posteriori* (Artigue, 2014).

Contexto e participantes

O estudo foi realizado com alunos do 11º ano que já aprenderam sobre sequências e séries geométricas finitas, mas que ainda não foram formalmente apresentados ao conceito de séries geométricas infinitas e limites. A atividade foi concebida como uma sessão em sala de aula de 90 minutos (ou dois períodos de 45 minutos). Os participantes foram recrutados em

turmas completas de uma escola de ensino médio vietnamita. O tamanho da amostra é 52 alunos, o que permite a análise qualitativa das respostas escritas e a realização de entrevistas de acompanhamento.

Descrição da atividade didática

Embora Nam et al. (2024) tenham utilizado um modelo de triângulo equilátero no PowerPoint, optamos por um quadrado unitário por duas razões. Em primeiro lugar, os ângulos retos e os lados iguais do quadrado tornam os cálculos de área fracionária ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, ...) mais transparentes para os alunos. Em segundo lugar, o contorno delimitado do quadrado reforça visualmente o conceito de “totalidade” de forma mais direta do que um triângulo, já que os alunos costumam perceber um quadrado como uma unidade completa. Essa escolha de *design* está alinhada com nosso foco, baseado no APOS, no mecanismo de conclusão.

A atividade segue as quatro questões descritas a seguir. Cada questão foi elaborada para estimular níveis específicos do APOS.

Contexto: O quadrado unitário abaixo está dividido e colorido de acordo com a seguinte regra:

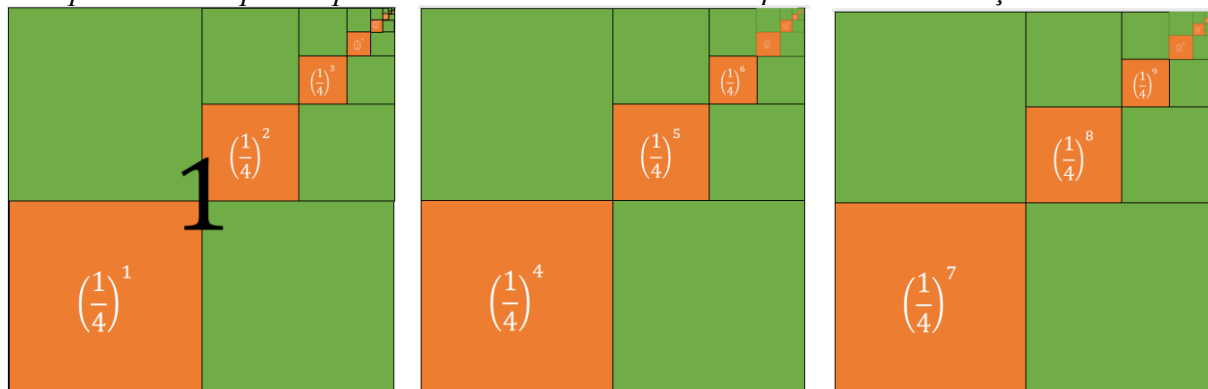
Passo 1: Divida o quadrado em 4 partes iguais e pinte 1 parte.

Passo 2: Escolha uma das 3 partes não pintadas (conforme mostrado na figura), divida-a em 4 partes iguais e pinte 1 parte dessa parte de acordo com a mesma regra.

Repita esse processo infinitas vezes.

Figura 1.

Três primeiras etapas do processo iterativo de subdivisão quadrada e coloração



Nota. Elaborada pelos autores.

Questão 1 (Ação → Processo)

- Tarefa: Calcule as áreas coloridas passo a passo: $u_1, u_2, u_3, \dots$ e escreva o termo geral.
- Objetivo APOS:
 - *Ação*: Os alunos calculam $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{16}$, $u_3 = \frac{1}{64}$ por meio de medição direta ou multiplicação de frações.
 - *Processo*: Por meio da dica (“cada termo é igual ao termo anterior multiplicado por qual número?”), os alunos internalizam a regra multiplicativa $u_n = u_{n-1} \times \frac{1}{4}$ e expressam $u_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
- Materiais: O diagrama do quadrado unitário mostrando as três primeiras etapas de subdivisão e coloração (três imagens fornecidas).

Questão 2 (Processo → Objeto / Totalidade)

- Tarefa: Observar as imagens e prever a área total colorida após um número infinito de etapas.
- Objetivo APOS: Os alunos passam do infinito potencial (continuação do processo) para o infinito real (a totalidade concluída). O fato de o quadrado unitário ser limitado (área total = 1) sugere visualmente que a soma infinita não pode exceder 1, e o padrão repetitivo leva a uma estimativa intuitiva (por exemplo, $\frac{1}{3}$). Esse é um primeiro passo em direção à conclusão e à síntese.
- Materiais: As mesmas imagens, possivelmente com uma orientação adicional: “Que fração do quadrado inteiro você acha que será finalmente colorida?”

Questão 3 (Objeto → Prova Formal)

- Tarefa: Utilizando a fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma série geométrica e o conceito de limite, demonstre que $S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$.
- Objetivo APOS: Os alunos confirmam a estimativa intuitiva (da Questão 2) por meio de um raciocínio algébrico rigoroso sobre limites. Eles aplicam a fórmula na forma fechada $S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ e calculam $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_1}{1-q}$. Nesta etapa, a soma infinita torna-se um Objeto – uma entidade matemática estática que pode ser manipulada sem se

referir ao processo infinito. Os alunos também percebem que o resultado corresponde à previsão visual, reforçando o encapsulamento.

Questão 4 (Esquema – Generalização)

- Tarefa: Enunciar o resultado para o caso geral (primeiro termo a , razão comum r , com $0 < r < 1$) e, se possível, desenhar um modelo geométrico correspondente.
- Objetivo APOS: Os alunos generalizam o caso específico para uma fórmula geral $S = \frac{a}{1-r}$, demonstrando que construíram um Esquema que conecta a interpretação da área, as séries geométricas e os limites. Eles também podem reconhecer as condições de convergência ($|r| < 1$).

Instrumentos de coleta de dados

Foram coletados três tipos de dados:

1. Exercícios dos alunos: Cada aluno preenche individualmente (ou em duplas) a ficha de exercícios contendo as quatro questões. As fichas de exercícios coletam explicações escritas, cálculos e previsões.
2. Entrevistas semiestruturadas: Após a atividade, de 6 a 8 alunos (selecionados com base em desempenhos variados) são entrevistados para investigar seu raciocínio em profundidade. As perguntas da entrevista se concentram em: como eles reconheceram o padrão; como interpretaram “infinitamente muitos passos”; se consideram a fórmula um “objeto completo”; e a conexão entre o diagrama quadrado e o processo de limite.
3. Observações em sala de aula: o pesquisador faz anotações de campo sobre as discussões dos alunos, suas dificuldades e o uso espontâneo do raciocínio visual.

Análise de dados: integração quantitativa e qualitativa no âmbito da engenharia didática

A engenharia didática (Artigue, 2014) não impõe um único tipo de análise de dados; ao contrário, a fase de análise *a posteriori* é adaptada aos constructos teóricos e às questões de pesquisa. Como nosso estudo é orientado pela teoria APOS e visa identificar tanto a distribuição das estruturas mentais (Ação, Processo, Objeto, Esquema) quanto os mecanismos cognitivos subjacentes (interiorização, conclusão, encapsulamento), empregamos uma abordagem mista que combina análises quantitativas e qualitativas. Essa integração é consistente com estudos

anteriores de engenharia didática que comparam previsões *a priori* com resultados observados (Villabona et al., 2024).

Análise quantitativa

A principal fonte de dados quantitativos foram as fichas de exercícios dos alunos ($N = 52$). As respostas de cada aluno às quatro perguntas foram codificadas de acordo com o nível mais alto do APOS demonstrado, utilizando os indicadores operacionais definidos no Quadro 1.

Dois pesquisadores codificaram, de forma independente, 20% das fichas de exercícios (selecionadas aleatoriamente) utilizando os indicadores operacionais do Quadro 1. A concordância entre os avaliadores atingiu 86%; as divergências foram resolvidas por meio de discussão. As demais fichas de exercícios foram codificadas pelo primeiro autor.

Para cada pergunta, calculamos a porcentagem de alunos em cada nível do APOS (Ação, Processo, Objeto, Esquema). Essas frequências foram tabuladas para fornecer uma visão geral do desempenho dos alunos.

Quadro 1.

Indicadores operacionais para a codificação dos níveis do APOS

Nível APOS	Indicadores operacionais nessa atividade
Ação	Calcula u_1, u_2, u_3 corretamente, mas não consegue identificar o termo geral sem um cálculo passo a passo; precisa de orientação externa para continuar.
Processo	Escreve automaticamente $u_n = (\frac{1}{4})^n$ ou $u_n = u_{n-1} \times \frac{1}{4}$; consegue estender a sequência mentalmente sem calcular cada termo; descreve o processo como “repetindo-se para sempre”.
Objeto	Utiliza adequadamente a fórmula na forma fechada $S = \frac{a}{1-r}$; justifica $S = \frac{1}{3}$ por meio do limite das somas parciais ou da observação visual de que “a região colorida corresponde exatamente a $\frac{1}{3}$ do quadrado”; consegue aplicar a fórmula a novos contextos (por exemplo, valores diferentes de a, r).
Esquema	Estabelece uma conexão entre o modelo de área, as séries algébricas e o conceito de limite; explica por que ($r < 1$) é necessário; consegue construir um modelo visual semelhante para outra razão (por exemplo, $r = \frac{1}{3}$ dividindo em 3 partes).

Nota. Elaborado pelos autores.

Para cada questão, calculamos:

- A porcentagem de alunos em cada nível do APOS (Ação, Processo, Objeto, Esquema).
- A porcentagem de alunos que previram corretamente o limite na Q2 e que generalizaram com sucesso na Q4.

Essas frequências foram tabuladas (Tabela 1 na seção Resultados) para fornecer uma visão geral do desempenho dos alunos e para testar as hipóteses *a priori* derivadas da decomposição genética.

Análise qualitativa

A análise qualitativa teve como objetivo compreender como os alunos progrediram (ou não progrediram) nos níveis do APOS e identificar a ativação dos mecanismos de conclusão e encapsulamento. As fontes de dados incluíram:

- Justificativas escritas nas fichas de exercícios (por exemplo, explicações sobre o padrão, previsões e demonstrações).
- Transcrições de entrevistas semiestruturadas (8 alunos, selecionados com base na variação no desempenho).

Utilizamos a codificação temática seguindo os procedimentos analíticos descritos por Miles et al. (2014). O quadro de codificação teve como base teórica a teoria APOS (Arnon et al., 2014) para captar os mecanismos cognitivos dos alunos.

Quadro 2.

O que o esquema de codificação incluiu

Código	Definição
<i>Indicador de ação</i>	Cálculo passo a passo; necessita de orientação externa; sem generalização.
<i>Indicador de processo</i>	Reconhece a regra multiplicativa; consegue expressar o termo geral sem calcular cada etapa; descreve um processo “sem fim”.
<i>Indicador de conclusão</i>	Visualiza o processo infinito como um todo concluído (“a área colorida acabará sendo $\frac{1}{3}$ ”).
<i>Indicador de encapsulamento</i>	Trata a soma infinita como um objeto estático; utiliza a fórmula na forma fechada como ferramenta.

Código	Definição
<i>Indicador de esquema</i>	Relaciona representações visuais, algébricas e de limites; generaliza para valores arbitrários de a, r .

Nota. Elaborado pelos autores.

O número de entrevistados ($n = 8$) foi determinado pela saturação dos dados, o ponto em que entrevistas adicionais já não revelavam novos temas ou categorias relacionadas aos mecanismos do APOS. Isso está de acordo com a prática comum na pesquisa qualitativa no âmbito da engenharia didática (Artigue, 2014).

As transcrições das entrevistas foram analisadas na íntegra. Citações textuais representativas foram selecionadas para ilustrar respostas típicas em cada nível, conforme apresentado na seção Resultados. A análise qualitativa também serviu para validar ou refinar a codificação quantitativa — por exemplo, um aluno poderia ter escrito uma fórmula correta (codificada como Objeto), mas, na entrevista, revelou uma compreensão baseada exclusivamente no processo; nesses casos, realizamos uma triangulação e atribuímos o nível inferior.

Integração na fase de análise a posteriori da DE

Seguindo o modelo de engenharia didática, a análise *a posteriori* consistiu em comparar os resultados observados (tanto distribuições quantitativas quanto padrões qualitativos) com as previsões *a priori* (a decomposição genética). Essa comparação nos permitiu:

- Confirmar ou refutar as hipóteses sobre os caminhos cognitivos.
- Identificar achados inesperados (por exemplo, conclusão antecipada no Q2).
- Detectar dificuldades específicas (por exemplo, baixo nível de domínio do Esquema no Q4) que indicam a necessidade de ajustes no projeto de ensino.

Assim, os dados quantitativos forneceram uma visão de nível macro da eficácia geral, enquanto os dados qualitativos proporcionaram uma compreensão de nível micro dos mecanismos cognitivos. As duas formas de análise são complementares e, juntas, sustentam o refinamento iterativo característico da engenharia didática.

CONSIDERAÇÕES ÉTICAS

Foi obtido o consentimento informado das autoridades escolares, dos pais e dos alunos. A participação é voluntária. Os dados são anonimizados (códigos dos alunos em vez de nomes). O estudo segue as diretrizes éticas para pesquisas na área da educação.

RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados do experimento didático de engenharia. Primeiramente, resumimos a análise a priori (níveis esperados de APOS para cada questão) e, em seguida, relatamos o desempenho real dos alunos com base nas fichas de exercícios ($n = 52$) e nas entrevistas de acompanhamento ($n = 8$). Os resultados estão organizados em torno das duas questões de pesquisa.

Visão geral do desempenho dos alunos nas quatro tarefas

Todos os 52 alunos preencheram a ficha de exercícios. A Tabela 1 mostra a porcentagem de alunos que demonstraram cada nível do APOS na resposta final de cada questão (codificação baseada nos indicadores operacionais definidos anteriormente).

Tabela 1.

Distribuição dos níveis de APOS nas quatro tarefas ($n = 52$)

Tarefa	Somente ação	Processo	Objeto	Esquema
Q1 (termos e termo geral)	13,5%	75,0%	11,5%	0%
Q2 (prever a área total)	9,6%	48,1%	36,5%	5,8%
Q3 (demonstrar usando o limite)	0%	11,5%	61,5%	26,9%
Q4 (caso geral)	7,7%	15,4%	42,3%	34,6%

Nota. Elaborado pelos autores. Um aluno pode ser classificado no nível mais alto observado nas justificativas. “Somente ação” significa que ele apresentou cálculos concretos, sem qualquer generalização.

RESPOSTA À RQ1: ESTRUTURAS E MECANISMOS MENTAIS PARA OPERAR COM ENTIDADES INFINITAS

RQ1: *De acordo com a teoria APOS, quais estruturas mentais (Ação, Processo, Objeto, Esquema) e mecanismos cognitivos (interiorização, encapsulamento, conclusão) permitem que os alunos operem com sucesso sobre entidades infinitas ao aprender a soma de uma série geométrica infinita?*

A análise das respostas dos alunos e das entrevistas sugere uma progressão pelos níveis do APOS, em consonância com a decomposição genética.

Nível da Ação

Cerca de 13–14% dos alunos permaneceram no nível Ação no primeiro e no segundo trimestres. Por exemplo, o aluno S17 escreveu:

“ $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{16}$, $u_3 = \frac{1}{64}$. Não vejo nenhuma regra, só vou desenhando cada passo e contando”.

Esses alunos conseguiram calcular os três primeiros termos seguindo o diagrama, mas não conseguiram expressar o termo geral sem uma orientação externa. Eles trataram cada coloração como um evento isolado, e não como um processo iterativo. Na Questão 2, ou não fizeram nenhuma previsão ou adivinharam: “Acho que será 1, porque colorimos muitas vezes”. Eles ainda operavam com o conceito de “infinito potencial” — uma continuação sem fim e sem conclusão.

Nível do Processo

A maioria dos alunos (75% no Q1, 48% no Q2) atingiu o nível de Processo. Eles internalizaram o padrão multiplicativo:

S24: “Cada vez que pegamos um quarto sem cor e pintamos uma de suas quatro partes, a nova área colorida é $\frac{1}{4}$ da área colorida anterior. Portanto, $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ”.

Esses alunos conseguiam realizar mentalmente a repetição sem precisar recalculá-la em cada etapa. Eles descreveram o processo como “continuando para sempre”, mas ainda tinham dificuldade em tratar a *soma infinita* como um todo concluído. Na Q2, frequentemente respondiam “Ficará próximo de $\frac{1}{3}$ mas nunca chegará lá” — uma visão típica de “infinito potencial”.

Nível do Objeto e mecanismo de conclusão

Uma proporção significativa (36,5% na Q2, 61,5% na Q3) demonstrou uma concepção do objeto, especialmente após utilizar a prova formal do limite. O mecanismo crucial foi a conclusão — a mudança de “sem fim” para “já concluído”.

Trecho da entrevista (S31, após a pergunta 2 e antes da pergunta 3):

Entrevistador: “Você adivinhou que a área total colorida é $\frac{1}{3}$. Mas como é possível somar um número infinito de peças?”.

S31: “Porque o quadrado inteiro tem área igual a 1. As partes coloridas não podem ultrapassar isso. E percebi que, a cada passo, a parte não colorida é sempre três vezes maior do que a parte colorida que acabamos de adicionar. Então, no final, a área colorida deve ser $\frac{1}{4}$ do total da área não colorida? Espera aí... Na verdade, se a área não colorida é três vezes maior do que a colorida, então área colorida + $3 \times$ área colorida = 1, então área colorida = $\frac{1}{4}$? Não, isso está errado... Deixa eu pensar: toda vez que pintamos um novo quadradinho, o que sobra ainda é três vezes essa nova parte. Então, no limite, a área total pintada S satisfaz $S = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \dots$. E também a área branca restante é três vezes S? Porque em cada etapa o branco = $3 \times$ (o que pintamos até agora)? Na verdade, no passo 1: branco = $\frac{3}{4}$, área colorida = $\frac{1}{4}$, branco = $3 \times$ área colorida. Passo 2: área colorida = $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, branco = $\frac{11}{16}$, não exatamente $3 \times$ área colorida. Mas, usando a fórmula, acredito nela”.

Isso parece indicar uma compreensão parcial do conceito — o aluno tenta encapsular, mas ainda hesita. No entanto, após a Questão 3 (demonstração do limite), o mesmo aluno escreveu:

“Temos $S_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$. Como $n \rightarrow \infty$, $(\frac{1}{4})^n \rightarrow 0$, então $S_n \rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$. Então, a soma infinita é exatamente $\frac{1}{3}$, não apenas uma aproximação”.

Nesse caso, a soma infinita é tratada como um objeto estático (o valor limite) por esse aluno. O encapsulamento do processo de limite na forma fechada $\frac{a}{1-r}$ foi observado em 61,5% dos alunos na questão Q3.

Nível do Esquema

No Q4 (caso geral), 34,6% dos alunos construíram um Esquema: escreveram corretamente $S = \frac{a}{1-r}$ para $0 < r < 1$, e alguns chegaram a produzir uma representação geométrica (por exemplo, dividindo um segmento ou quadrado unitário em $\frac{1}{r}$ partes). O aluno S44 escreveu:

“Se começarmos com um quadrado de área a e, a cada vez, retirarmos uma fração r da parte anterior, a área total será $a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}$. O mesmo se aplica se desenharmos um retângulo de área a e continuarmos subdividindo o que sobrar na proporção r ”.

Esse aluno relacionou a fórmula algébrica, a condição de convergência e o modelo visual — um Esquema claro.

Resposta à RQ1: A operação bem-sucedida em entidades infinitas (soma de séries geométricas infinitas) requer:

- Interiorização do padrão de multiplicação iterativa (Ação $\rightarrow$ Processo);
- Conclusão (visualização do processo infinito como uma totalidade concluída) facilitada pelo modelo visual delimitado;
- Encapsulamento do processo na fórmula estática de forma fechada (Processo $\rightarrow$ Objeto);
- Conexão temática entre representações geométricas, algébricas e de limite (Esquema).

Os alunos que permaneceram nos níveis “Ação” ou “Processo” não conseguiram aceitar o “infinito real” e, muitas vezes, rejeitaram a ideia de que uma soma infinita possa ter um valor exato finito.

RESPOSTA À RQ2: IMPACTO DO MODELO DE ÁREA VISUAL NO ENCAPSULAMENTO E NA CONCLUSÃO

RQ2: *De que forma o uso de um modelo visual concreto de área (subdivisão iterativa do quadrado unitário) afeta a compreensão dos alunos sobre um processo infinito e seu mecanismo de conclusão, ajudando-os a alcançar uma concepção de Totalidade e de Objeto?*

Os dados sugerem que o modelo visual desempenhou um papel importante, especialmente ao desencadear o mecanismo de conclusão e ao fornecer referências intuitivas para a compreensão.

Modelo visual como apoio para a conclusão

Na Q2 (previsão antes da demonstração formal), 36,5% dos alunos já deram a resposta correta, $\frac{1}{3}$, e outros 48,1% deram um número próximo a $\frac{1}{3}$ (por exemplo, 0,33, 0,3). Quando questionados sobre como chegaram à previsão, a maioria se referiu ao diagrama:

S12: “Olha para as três imagens. A primeira: $\frac{1}{4}$ colorida. A segunda: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125$. A terceira: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64} \approx 0,328$. Está se aproximando de $\frac{1}{3}$. E o quadrado é limitado, então não pode passar de $\frac{1}{3}$ ”.

Embora ainda não tivessem aprendido o teorema do limite, o fato de a região colorida ser *limitada* e a *convergência visual* sugeriram que o processo “termina” em uma porção fixa do quadrado. Essa conclusão intuitiva permitiu que os alunos tratassem o processo infinito como uma totalidade concluída antes de realizar a demonstração algébrica.

O modelo visual como ponto de referência para o encapsulamento

Nas entrevistas, os alunos que tiveram dificuldade com o limite algébrico (por exemplo, S07) ainda conseguiram expressar o resultado por meio da totalidade visual:

“Eu não entendo muito bem essa coisa de limite, mas vejo que, depois de muitos passos, as partes brancas ficam minúsculas e a área colorida para de mudar. Parece que exatamente um terço do quadrado está colorido — dá para ver pelo padrão que, a cada vez, a nova parte colorida é três vezes menor do que o branco restante, então, no final, a parte colorida é $\frac{1}{3}$ ”.

Esse aluno parecia ter sintetizado o processo infinito em um objeto visual estático (a proporção final colorida) sem formalizar totalmente o limite. Para ele, o modelo de área funcionou como uma ponte para o nível do Objeto. Após as instruções, ele conseguiu aplicar a fórmula a outros problemas (por exemplo, $a = 2, r = \frac{1}{2} \rightarrow S=4$) por analogia, indicando um Objeto operacional.

Comparação com uma instrução hipotética puramente algébrica

Embora isso não fizesse parte do desenho deste estudo, perguntamos a seis alunos, durante entrevistas retrospectivas, sobre sua experiência anterior com séries geométricas infinitas (eles não tinham nenhuma). Quando lhes foram apresentadas as mesmas perguntas, mas apenas com a definição algébrica ($u_n = ar^{n-1}$), eles afirmaram que teriam simplesmente memorizado a fórmula. O modelo visual fez com que eles “percebessem por que a fórmula faz sentido” (S29). Isso sugere que o modelo de área reduz significativamente a barreira à conclusão e ao encapsulamento, ao fornecer uma totalidade concreta e delimitada.

Resposta à RQ2: O modelo visual de área impacta positivamente o encapsulamento e a conclusão ao:

- Tornar a totalidade delimitada (quadrado unitário) perceptivelmente acessível, o que auxilia na conclusão de um processo que, de outra forma, seria interminável.
- Fornecer uma âncora visual intuitiva para o valor limite, permitindo que os alunos vejam a soma como uma parte estática do todo.
- Ajudar os alunos que têm dificuldade com manipulações formais de limites a ainda assim alcançarem uma concepção de Objeto (por meio do encapsulamento visual), facilitando assim a transição para o Esquema completo.

Comparação a posteriori com a análise a priori (engenharia didática)

A análise *a priori* previu que a maioria dos alunos alcançaria o nível Processo até o Q1 e o nível Objeto até o Q3. A Tabela 1 confirma isso. No entanto, foram observados alguns desvios:

- Dificuldade inesperada na generalização (Q4): 34,6% alcançaram o nível Esquema, mas 15,4% permaneceram no nível Processo e 7,7% no nível Ação. Esses alunos não conseguiram transferir a razão específica $r = \frac{1}{4}$ para um r arbitrário. Eles escreveram $S = \frac{a}{1-\frac{1}{4}}$ em vez de $\frac{a}{1-r}$. Isso indica que o Esquema não foi totalmente construído por todos.
- Conclusão antecipada na Q2: Um número maior do que o esperado de alunos (36,5%) apresentou a previsão exata de $\frac{1}{3}$, frequentemente utilizando o argumento da “proporção das sobras” (por exemplo, total branco = $3 \times$ total colorido). Isso

sugere que o modelo visual pode ter permitido que alguns alunos contornassem o limite algébrico e gerassem uma “prova visual”, o que é um resultado positivo.

Essas observações servirão de base para uma futura iteração da engenharia didática (por exemplo, adicionando uma tarefa de transição para o valor geral de r).

DISCUSSÃO

Esta seção interpreta os resultados em relação às duas questões de pesquisa. Primeiramente, respondemos à RQ1 examinando as estruturas e os mecanismos mentais que os alunos utilizaram ao trabalhar com séries infinitas. Em seguida, abordamos a RQ2 avaliando a contribuição específica do modelo da área visual para os processos de encapsulamento e conclusão. Por fim, discutimos os resultados inesperados e as limitações.

Resposta à RQ1: Estruturas mentais e mecanismos para operar com entidades infinitas

A RQ1 questionou: *quais estruturas mentais (Ação, Processo, Objeto, Esquema) e mecanismos cognitivos (interiorização, encapsulamento, conclusão) permitem que os alunos operem com sucesso com entidades infinitas ao aprender a soma de uma série geométrica infinita?*

Nossos resultados confirmam que os alunos que alcançaram com sucesso o nível de Objeto ou Esquema empregaram três mecanismos-chave em sequência:

- Interiorização (Ação $\rightarrow$ Processo): Ao calcular as três primeiras áreas coloridas ($u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{16}$, $u_3 = \frac{1}{64}$) e perceber a multiplicação repetida por $\frac{1}{4}$, os alunos internalizaram o padrão. Isso foi observado em 75% dos alunos na Q1, que conseguiram expressar o termo geral $u_n = (\frac{1}{4})^n$ sem precisar fazer o cálculo passo a passo.
- Conclusão (Processo $\rightarrow$ Totalidade): Os alunos que visualizaram a subdivisão infinita como um todo concluído (por exemplo, “a área colorida vai parar de mudar em $\frac{1}{3}$ ”) demonstraram o mecanismo de conclusão. Isso exigiu a transição do infinito potencial (“isso nunca acaba”) para o infinito real (“já é uma porção fixa do quadrado”). Na Q2, 36,5% dos alunos previram exatamente $\frac{1}{3}$, e outros 48,1% deram um valor próximo,

indicando que a conclusão havia ocorrido para uma proporção substancial mesmo antes do ensino formal de limites.

- Encapsulamento (Processo/Totalidade → Objeto): Os alunos que encapsularam a soma infinita transformaram o processo dinâmico em um objeto estático — a fórmula na forma fechada $S = \frac{u_1}{1-q}$. Na Q3, 61,5% dos alunos aplicaram corretamente o limite das somas parciais para provar que $S = \frac{1}{3}$, e, posteriormente, puderam usar a fórmula para resolver novos problemas (por exemplo, na Q4, 42,3% alcançaram o nível de Objeto para o caso geral). Esses alunos trataram a soma infinita como um *Objeto Transcendente* (Brown et al., 2010) — um valor finito derivado de um processo infinito, que não herda todas as propriedades das somas parciais.

Os alunos que permaneceram nos níveis de Ação ou Processo (por exemplo, 13,5% na Q1, 9,6% na Q2) apresentaram dificuldades típicas relacionadas ao infinito potencial: não conseguiam expressar o termo geral sem pistas externas ou insistiam que a soma “se aproxima, mas nunca atinge” $\frac{1}{3}$, refletindo uma incapacidade de concluir o processo.

Assim, a resposta à RQ1 é que a operação bem-sucedida na série geométrica infinita requer interiorização, conclusão e encapsulamento em sequência, e a ausência de qualquer um desses mecanismos resulta em uma concepção fragmentada (Ação/Processo). Nossas descobertas ampliam os resultados de Villabona et al. (2024), mostrando que a conclusão pode ser desencadeada mais cedo (mesmo antes da instrução formal sobre limites) quando se utiliza um modelo visual limitado, e que o encapsulamento da soma infinita não requer necessariamente o domínio dos limites algébricos — a totalidade visual, por si só, pode servir como âncora para alguns alunos.

Resposta à RQ2: Impacto do modelo de área visual no encapsulamento e na conclusão

A RQ2 questionou: *Como o uso de um modelo concreto de área visual (subdivisão iterativa do quadrado unitário) afeta o encapsulamento de um processo infinito pelos alunos e seu mecanismo de conclusão, ajudando-os a alcançar uma concepção de Totalidade e de Objeto?*

O modelo visual pareceu ser importante de três maneiras:

- Fornecer uma totalidade delimitada: ao contrário de séries puramente simbólicas, o quadrado unitário possui um limite perceptível (área total = 1). Essa restrição física proporcionou aos alunos um referente concreto para a “conclusão”. Nas entrevistas, os alunos se referiram repetidamente ao fato de que “as partes coloridas não podem exceder o quadrado inteiro” como a razão pela qual conseguiam imaginar um valor final. Essa constatação está alinhada com Fischbein (2001), que argumentou que modelos tácitos de delimitação servem de suporte para a transição para o infinito real. O papel de um modelo visual delimitado no desencadeamento da conclusão é consistente com as constatações de Nam et al. (2024), que utilizaram um modelo dinâmico de triângulo no PowerPoint para ilustrar a mesma série. Seus alunos também inferiram visualmente o limite $1/3$ ao observar que o triângulo central branco podia ser dividido em três partes iguais. No entanto, nosso estudo amplia essa observação ao mostrar que mesmo imagens estáticas das três primeiras etapas de subdivisão (sem animação) foram suficientes para que 36,5% dos alunos previssem o limite exato, sugerindo que a delimitação perceptiva do quadrado unitário — e não necessariamente os efeitos de movimento — é o fator crítico para a conclusão.
- Apoiar a conclusão por meio da convergência visual: as três imagens (etapas 1–3) mostraram claramente que a área recém-adicionada ficava menor a cada vez e que a região colorida se aproximava de uma porção fixa do quadrado. Mesmo sem limites algébricos, 36,5% dos alunos previram o limite exato $1/3$ (e muitos outros, um valor próximo). Isso sugere que o padrão visual por si só pode acionar o mecanismo de conclusão, reduzindo a necessidade de raciocínio abstrato sobre limites na fase inicial.
- Facilitar o encapsulamento da soma infinita: uma vez que os alunos visualizaram a totalidade (a região colorida como um todo concluído), eles aceitaram mais prontamente que a soma aritmética infinita $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ é igual a um único número ($\frac{1}{3}$). Na Q3, 61,5% dos alunos realizaram com sucesso a demonstração algébrica e utilizaram a fórmula como um objeto. Notavelmente, mesmo os alunos que tiveram dificuldades com limites formais (por exemplo, S07 nas entrevistas) ainda conseguiram descrever a soma como um objeto estático, referindo-se à totalidade visual: “Vejo que, após muitas etapas, a área colorida é exatamente $1/3$ do quadrado”. Isso demonstra que o modelo de área pode servir como uma âncora

autônoma para a compreensão quando a manipulação simbólica ainda não foi dominada.

Em comparação com o ensino puramente algébrico (conforme hipotetizado na literatura anterior), o modelo visual reduziu a barreira cognitiva tanto para a conclusão quanto para o encapsulamento, especialmente para alunos com habilidades procedimentais mais fracas. No entanto, o modelo por si só não levou automaticamente ao Esquema (apenas 34,6% alcançaram esse nível), indicando que são necessárias atividades complementares de transição para a generalização completa.

Assim, a resposta à RQ2 é que o modelo visual de área afeta positivamente a conclusão ao fornecer uma totalidade delimitada perceptivamente e convergência visual, e apoia o encapsulamento ao oferecer um referente concreto para a soma infinita estática, tornando assim o Objeto Transcendente mais acessível.

Comparação com referenciais teóricos e estudos empíricos anteriores

Fischbein (2001) argumentou que os modelos intuitivos do infinito (modelos tácitos) podem ser tanto favoráveis quanto prejudiciais. Os alunos costumam possuir um modelo implícito do infinito como um processo dinâmico e sem fim — um infinito potencial —, o que impede a aceitação do infinito real. Nosso modelo visual de área funciona como um modelo tácito favorável, ao projetar a delimitação — uma propriedade finita e perceptível — sobre o processo infinito. O contorno nítido do quadrado unitário e sua área total fixa (1) fornecem um “recipiente” concreto. Essa constatação é empiricamente consistente com a hipótese de Fischbein de que uma âncora visual bem escolhida pode converter um obstáculo potencial (a infinitude) em um facilitador (a totalidade delimitada). Em nosso estudo, 36,5% dos alunos previram corretamente o limite $\frac{1}{3}$ antes de qualquer instrução formal, frequentemente referindo-se explicitamente à área limitada do quadrado.

Sierpiska (1987) documentou que os alunos costumam tratar os limites como aproximações inatingíveis, pois projetam propriedades de somas parciais finitas sobre o limite infinito. Posteriormente, Ely (2011) propôs que “visualizar o infinito por meio da projeção de propriedades finitas” poderia ser produtivo se a propriedade projetada fosse escolhida adequadamente. Nosso estudo fornece um exemplo concreto de projeção produtiva: a limitada do quadrado (uma propriedade finita) é projetada sobre a soma infinita, levando à aceitação de um limite finito. Além disso, observamos que os alunos que permaneceram no nível Processo

(por exemplo, aqueles que disseram “a soma se aproxima, mas nunca atinge $\frac{1}{3}$ ”) apresentaram um obstáculo epistemológico semelhante ao descrito por Sierpinska. Em contrapartida, os alunos que alcançaram o nível Objeto distinguiram com sucesso entre somas parciais e o limite completo, superando esse obstáculo.

Nam et al. (2024) utilizaram um modelo dinâmico de triângulo no PowerPoint para ilustrar a mesma série ($q = \frac{1}{4}$). Sua pesquisa-ação demonstrou que o modelo aumentou o envolvimento e ajudou os alunos a inferir visualmente a soma $\frac{1}{3}$. No entanto, nossa análise baseada no APOS sugere insights adicionais que não foram abordados explicitamente por seu quadro de reificação/procepção. Especificamente, constatamos que:

- A conclusão (visualização da totalidade final) pode ser desencadeada apenas por imagens estáticas (três etapas de subdivisão), não necessariamente por efeitos dinâmicos de ampliação.
- O encapsulamento ocorreu seja por meio do limite algébrico (61,5% dos alunos), seja apenas por meio da totalidade visual — um achado não relatado por Nam et al. (2024).
- A generalização para razões arbitrárias ($S = \frac{a}{1-r}$) revelou-se difícil (apenas 34,6% alcançaram o Esquema), uma limitação não abordada em seu estudo, pois eles também utilizaram apenas $q = \frac{1}{4}$.

Do ponto de vista metodológico, nossa abordagem de engenharia didática com decomposição genética *a priori* oferece uma base mais sólida para comparar os caminhos cognitivos previstos e observados do que a pesquisa-ação.

Artigue (1998) destacou a dificuldade que os alunos enfrentam na transição do pensamento algébrico “finito” para o pensamento analítico “infinito”, particularmente no que diz respeito aos limites. Nosso estudo operacionaliza essa transição por meio dos mecanismos de conclusão e encapsulamento do APOS. Enquanto estudos anteriores do APOS sobre limites (por exemplo, Arnon et al., 2014) se concentraram em funções, nosso trabalho amplia a estrutura para séries geométricas infinitas, mostrando que os mesmos mecanismos se aplicam. Além disso, fornecemos evidências empíricas de que um modelo visual delimitado pode servir como um “corte didático” (Artigue, 1998) — uma intervenção cuidadosamente projetada que ajuda os alunos a superar o obstáculo epistemológico do infinito real.

Resultados inesperados e implicações didáticas

Dois resultados inesperados merecem atenção além das duas questões de pesquisa (RQs). Em primeiro lugar, a alta precisão das previsões iniciais na Q2 sugere que o modelo pode oferecer uma quase-prova por meio de padrões visuais. Os professores poderiam aproveitar as estimativas intuitivas dos alunos como ponto de partida para o argumento formal do limite, criando uma necessidade cognitiva de prova algébrica. Em segundo lugar, o modesto nível de domínio do Esquema (34,6%) indica que a generalização para uma razão arbitrária r continua sendo um desafio, o que é consistente com a afirmação da teoria APOS de que a construção do Esquema é a etapa mais exigente (Arnon et al., 2014). Para fortalecer a transferência, recomendamos adicionar tarefas de — por exemplo, pedir aos alunos que construam uma subdivisão quadrada semelhante para $r = \frac{1}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ antes de apresentar a fórmula geral $S = \frac{a}{1-r}$. A dificuldade em generalizar para razões arbitrárias (apenas 34,6% alcançaram o Esquema) pode ser parcialmente atribuída à especificidade da razão $q = \frac{1}{4}$, que possui a propriedade conveniente de que a área restante é sempre três vezes maior que a parte recém-colorida — um padrão que pode ser explorado como um atalho visual. Uma limitação semelhante aparece no estudo de Nam et al. (2024), no qual o modelo triangular também utilizou $q = \frac{1}{4}$, e não abordou explicitamente a generalização para outras razões. Isso sugere que um modelo visual adaptado a uma única razão, embora eficaz para a formação inicial do conceito, pode inadvertidamente dificultar a abstração, a menos que seja seguido por atividades deliberadas de transição (por exemplo, construir um modelo para $q = \frac{1}{3}$ ou $q = \frac{2}{3}$).

Implicações pedagógicas

Com base em nossas descobertas, oferecemos as seguintes recomendações concretas para o ensino da soma de uma série geométrica infinita:

- Apresentar o modelo visual antes da fórmula algébrica. Permitir que os alunos prevejam o limite intuitivamente, observando as três primeiras iterações do quadrado colorido. Isso cria uma necessidade cognitiva pela prova formal e faz com que a fórmula pareça uma confirmação natural, em vez de uma regra mágica.
- Usar a totalidade visual como um caminho alternativo ao encapsulamento. Para alunos que têm dificuldade com limites algébricos ou notação de limite, os

professores podem perguntar: “Que fração do quadrado inteiro vocês acham que fica colorida no final?”, sem exigir símbolos de limite. A delimitação visual, por si só, já pode apoiar a concepção do objeto.

- Abordar explicitamente a dificuldade na generalização. Como apenas 34,6% dos alunos generalizaram espontaneamente para $S = \frac{a}{1-r}$, os professores devem incluir tarefas de transição antes de introduzir a fórmula simbólica. Por exemplo:
 - Pedir aos alunos que repitam a atividade com uma razão diferente (por exemplo, $q = \frac{1}{3}$, dividindo um triângulo ou um retângulo em três partes).
 - Orientar os alunos a substituírem o número concreto “ $\frac{1}{4}$ ” por uma variável r em sua explicação por escrito.
 - Comparar dois modelos visuais (por exemplo, um quadrado com $q = \frac{1}{4}$ e um triângulo com $q = \frac{1}{3}$) para destacar a estrutura invariante.
- Usar o modelo para esclarecer possíveis equívocos sobre o infinito. Quando um aluno disser “a soma se aproxima, mas nunca chega a $\frac{1}{3}$ ”, perguntar: “Se o processo nunca termina, ainda assim podemos apontar uma região fixa do quadrado que esteja colorida?”. Essa pergunta direciona a atenção para a totalidade completa.
- Integrar a atividade visual à demonstração formal do limite. Depois que os alunos tiverem previsto $\frac{1}{3}$ a partir do quadrado, apresentar a fórmula da soma parcial e a derivação do limite como uma forma de confirmar a intuição deles, e não como uma ideia totalmente nova.

LIMITAÇÕES E PESQUISAS FUTURAS

Este estudo apresenta várias limitações que devem ser abordadas em pesquisas futuras:

- Relação e modelo únicos. Utilizamos apenas $q = \frac{1}{4}$ e um quadrado unitário. Não está claro se os mesmos mecanismos de preenchimento e encapsulamento seriam observados com outras relações (por exemplo, $q = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$) ou outras formas geométricas (por exemplo, retângulo, segmento de reta). Estudos futuros devem variar sistematicamente a relação e a configuração visual.
- Imagens estáticas *versus* modelos dinâmicos. Nossa atividade utilizou três imagens estáticas (impressas ou exibidas). Embora isso tenha sido suficiente para muitos

alunos, modelos dinâmicos (como o efeito de ampliação do PowerPoint utilizado por Nam et al., 2024) poderiam reforçar a sensação de “continuação infinita” para alguns alunos. Um estudo comparativo poderia examinar se a adição de animação fortalece a compreensão da completude, especialmente para alunos com menor capacidade de visualização espacial

- Ausência de medida de retenção de longo prazo. Avaliamos a compreensão dos alunos imediatamente após a atividade. São necessários estudos longitudinais para determinar se a concepção de “objeto” permanece estável após várias semanas ou meses, ou se os alunos reverterem para o pensamento baseado em processos sem reforço.
- Ausência de um grupo de controle. Não comparamos nosso ensino com o modelo visual com um grupo que recebesse ensino puramente algébrico. Um experimento controlado e randomizado forneceria evidências causais mais sólidas sobre a eficácia do modelo de área.
- Homogeneidade da amostra. O estudo foi realizado em uma única escola de ensino médio vietnamita. É necessária a replicação em diferentes contextos culturais e educacionais para avaliar a generalização.

Direções futuras de pesquisa:

- Projetar e testar uma versão da atividade para razões adicionais (por exemplo, $q = \frac{1}{3}$, utilizando um triângulo subdividido em três partes).
- Combinar a ficha de exercícios baseada no APOS com *softwares* dinâmicos (GeoGebra, PowerPoint) e comparar os resultados.
- Investigar se o sucesso inicial com o modelo visual se transfere para outros processos infinitos (decimais periódicos, paradoxos de Zenão).
- Realizar um experimento de ensino que faça uma ponte explícita entre a razão específica e a fórmula geral, medindo o desenvolvimento do esquema ao longo de várias aulas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo elaborar e avaliar uma atividade didática baseada no APOS que utiliza uma subdivisão iterativa do quadrado unitário para introduzir a soma de uma série geométrica infinita. A análise indica que a compreensão dos alunos se desenvolve por meio de uma sequência de movimentos cognitivos: primeiro, a interiorização do padrão multiplicativo; depois, a conclusão do processo infinito como uma totalidade limitada; e, finalmente, o encapsulamento desse processo em um objeto matemático estável. Nesse sentido, o modelo de área visual não se limitou a ilustrar uma fórmula já conhecida pelos alunos, mas ajudou a criar condições para que a fórmula se tornasse significativa.

Os resultados mostram que o modelo visual ajudou os alunos a passar de uma visão procedural das adições repetidas para uma compreensão mais integrada da soma infinita. O quadrado delimitado ofereceu uma referência concreta para a ideia de totalidade, permitindo que muitos alunos antecipassem o valor limite antes do tratamento algébrico formal. Ao mesmo tempo, os resultados também indicam que a intuição visual por si só não é suficiente para todas as dimensões do desenvolvimento conceitual. A generalização do modelo visual específico para razões arbitrárias continuou sendo uma etapa desafiadora, o que demonstra a necessidade de tarefas adicionais que conectem explicitamente a representação concreta, a estrutura algébrica e a condição de convergência.

A principal contribuição do estudo reside na articulação entre o projeto didático e a análise cognitiva. A ficha de exercícios proposta oferece um recurso de sala de aula de baixo custo e de fácil aplicação, enquanto a análise baseada no APOS esclarece por que e em que condições o modelo visual pode apoiar a aprendizagem. O estudo também refina a decomposição genética de séries geométricas infinitas, mostrando que a completude e o encapsulamento podem surgir por meio do raciocínio visual antes do domínio completo da notação formal do limite.

Esses resultados sugerem que os professores devem introduzir as séries geométricas infinitas por meio de experiências visuais cuidadosamente estruturadas antes de apresentar a fórmula algébrica como uma regra definitiva. O modelo deve ser seguido por atividades de generalização orientadas, comparações com outras razões e uma discussão explícita sobre a diferença entre aproximar-se de um valor e aceitar a soma infinita como um objeto matemático exato. Dessa forma, a atividade pode contribuir não apenas para o desempenho procedural, mas também para uma compreensão mais profunda do infinito, do limite e da convergência na matemática escolar.

O estudo é limitado pelo uso de uma única razão, imagens estáticas e um único contexto escolar. Investigações futuras poderão comparar diferentes configurações visuais, incluir modelos digitais dinâmicos, analisar a retenção a longo prazo e contrastar o modelo proposto com o ensino puramente algébrico. Tais desenvolvimentos possibilitariam avaliar com maior precisão o alcance do modelo e seu potencial para um uso mais amplo no ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40–55.
- Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). Springer.
- Brown, A., McDonald, M., & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. In F. Hitt, D. Holton, & P. W. Thompson (Eds.), *Research in collegiate mathematics education VII: CBMS issues in mathematics education* (Vol. 16, pp. 115–141). American Mathematical Society.
- Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.9 and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(3), 232–258.
- Ely, R. (2011). Envisioning the infinite by projecting finite properties. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(1), 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.12.001>
- Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 309–329. <https://doi.org/10.1023/A:1016088708705>
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116–140. <https://doi.org/10.2307/749505>
- Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (3rd ed.). Sage.
- Nam, P. S. (2013). *Improve the effectiveness of teaching some calculus concepts for high school students specializing in mathematics based on the application of constructivist theory* (Doctoral dissertation, Vinh University).
- Nam, P. S., Linh, N. T., Tu, P. T. T., Lavicza, Z., & Bautista, G., Jr. (2024). PowerPoint as a tool to support the creation of dynamic models for teaching: The case of the sum of an infinite geometric sequence. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 31(3), 125–134. https://doi.org/10.1564/tme_v31.3.03
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371–397. <https://doi.org/10.1007/BF00240986>

Villabona, D., Oktaç, A., & Roa-Fuentes, S. (2024). Acting on totalities of infinite processes: Constructing facets of an object conception. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 1375–1387. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01631-6>

CRediT Author Statement

- ☐ **Reconhecimentos:** Os autores agradecem aos participantes que se dispuseram a participar do estudo.
 - ☐ **Financiamento:** Esta pesquisa foi financiada pela Universidade de Saigon.
 - ☐ **Conflitos de interesse:** Os autores declaram não ter conflitos de interesse.
 - ☐ **Aprovação ética:** Foi obtido consentimento informado das autoridades escolares, dos pais e dos alunos. A participação foi voluntária. Os dados foram anonimizados (códigos dos alunos em vez de nomes). O estudo segue as diretrizes éticas para pesquisas educacionais.
 - ☐ **Disponibilidade de dados e material:** Os dados que sustentam as conclusões deste estudo estão disponíveis mediante solicitação aos autores.
 - ☐ **Contribuição dos autores:** Todos os autores participaram igualmente de todo o processo de redação do artigo.
-

Processamento e editoração: Editora Ibero-Americana de Educação
Revisão, formatação, normalização e tradução

